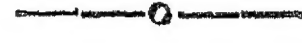
THE

PRINCESS OF WALES

SARASVATĪ BHAVANA

No. 80

(PART I)



EDITED

BY

Dr. MANGAL DEVA SHASTRI,

M. A., D. PHIL. (OXON.),

PRINCIPAL,

GOVT. SANSKRIT COLLEGE, BENARES



THE

CHALARĀŚIKALANA

(PART I)



Printed by

M. V. Paradkar

Jnanamandal Yantralaya, Benares City



1941.

म० म० सुधाकरद्विवेदिविरचितं

चलराशिकलनम्

चतुरध्यायात्मकः प्रथमो भागः



THE

CHALARAŚIKALANA

BY

M. M SUDHĀKARA DVIVEDI

(PART I)

EDITED

BY

Pt. BALDEVA MISHRA

Jyautishacharya Jyautish Tirth

SARASVATĪ BHAVANA

BENARES.

1941.

PREFACE.

A SUFFICIENT account has been already given in the preface of my Differential Calculus* of the gradual development of Differential and Integral Calculus in Europe, and also in whose mind the notion of this science first arose in India. Therefore, here I only wish to say that the learned public may not think it to be a mere translation or an abstract of some European book, but as a new treatise on the subject I have shown, as far as possible, all the important theorems together with numerous examples, so that the students may be able to grasp the methods thoroughly and thereby solve problems without the least doubt.

Many new methods are described in different portions of this book, which will be found simpler than those of Europeans. For instance, Mr Todhunter in his Integral Calculus, article 14, for the integration of $\frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$ assumed $\sqrt{x^2 \pm a^2} = z - x$. The same assumption was described by Mr Williamson. Mr Hymers putting $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ into the form $\frac{(\sqrt{x^2 \pm a^2})(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}}$ deduced the integral.

Professor De Morgan worked thus

Let $\sqrt{x^2 \pm a^2} = y$, then $x^2 \pm a^2 = y^2$.

$\therefore 2x\,dx = 2y\,dy$ or $x\,dx = y\,dy$.

Therefore, $x\,dx + y\,dx = y\,dy + y\,dx$,

$\therefore dx = \frac{y(dy + dx)}{x + y}$, by substituting $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm y^2}} =$

$$\int \frac{y(dy + dx)}{y(x + y)} = \int \frac{dx + dy}{x + y} = \text{Log}(x + y) = \text{Log}(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}).$$

Professor De Morgan deduced a second method of $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ also, by employing an imaginary quantity, thus

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - (x\sqrt{-1})^2}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \int \frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{a^2 - (x\sqrt{-1})^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}} \text{Sin}^{-1} \frac{x\sqrt{-1}}{a}.$$

But by De Moivre's Theorem

$\text{Cos}\,\theta - \text{Sin}\,\theta\sqrt{-1} = e^{-\theta\sqrt{-1}}$

---

* Named Chalana-Kalan, which is dedicated to His Honor Sir Alfred Lyall, K C B, C I E late Lieutenant-Governor of the North-Western Provinces and Chief Commissioner of Oudh, and published by the order of Government in 1886

Extracts from newspapers and journals

$$o\imath - \theta\sqrt{-1} = \text{Log}\,(\text{Cos}\,\theta - \text{Sin}\,\theta\sqrt{-1})$$

A HINDI TREATISE ON THE DIFFERENTIAL CALCULUS *

OPINIONS OF THE PRESS

It has long been regretted that, notwithstanding the vast amount of tuition constantly given in India and the undoubted intelligence of the people, that country has contributed nothing to the general stock of scientific knowledge We have to go back a thousand years to reach a period of independent scientific research, and from that remote time to these a period of intellectual stagnation appears to have supervened At last that reproach has been removed, for a scholar has arisen with sufficient mental force to grasp the highest problems of both Western and Eastern science, and with sufficient originality to weave the two together into an harmonious system, while criticising and improving on both The book to which we are now calling attention is therefore, a remarkable one, and calls for special notice as the first forward step which India has made in this department of study for centuries But the chief point to note in the book is that it is written in the Hindi language, which not only affords another demonstration of the increasing prominence which that language is attaining, but enables the book to give to thousands of Indian mathematicians who are unfamiliar with the English language the means of carrying their studies to a very high point This is a most important fact, because it is well known that a scientist is not often at the same time a linguist, still less is it given to mortals to gain such power over a foreign language as to permit them not only to acquire what that foreign language has to teach, but to carry on independent research beyond that point The work before us removes that obstacle by presenting to Indian scholars in their own vernacular the highest facts of Western science The author has further more, had the judgment to unite with those facts the really correct processes of ancient Indian mathematicians, and, in this way, he grafts on to the Indian mind the additional knowlege of Europe To do this, it is clear he had to originate processes of his own, for, in a subject like the Differential Calculus, resting on the nicest discrimination of the reasoning faculty, mere translation of the ideas of one people into the language of another people would have been simply futile The author has proved himself to possess a masterly knowledge of mathematics by the skill with which he has transfused—not translated—European ideas into Indian language, and there can be no doubt that his valuable work will give a real impetus to original scientific research among his countrymen

It is not generally known that the old Indian mathematician Bhaskracharya, so long ago as A D 1150 had devised a method of calculation practically identical with the Differential Calculus, and the term *tatkalikgati*, which he applied to the increment he used, has much the same significance as that employed in the Differential Calculus He was right in his method, but wrong in his proof, and his accuracy is seen by the fact that he was able to demonstrate that when a variable attains the maximum value its differential vanishes, and that when a planet is either in apogee or in perigee the equation of centre vanishes He was aware that the increment vanishes in some intermediate position, and from this the principle of continuous function follows in due course, which is the basis of the proof of Taylor's theorem

*"Chalana-Kalana" by Pandit Sudhokara Dwivedi Benares, Lazarus and Co., 1886

Let $\text{Sin}\,\theta = \frac{x}{a}\sqrt{-1}$, $\text{Cos}\,\theta = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}$, $-\sqrt{-1} = \frac{1}{\sqrt{-1}}$,

$$\theta = \text{Sin}^{-1}\frac{x\sqrt{-1}}{a} \text{ or } \frac{1}{\sqrt{-1}}\text{Sin}^{-1}\frac{x\sqrt{-1}}{a} =$$

$$\text{Log}\left\{\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} - \frac{x}{a}(\sqrt{-1})^2\right\} = \text{Log}\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right)$$

where we omit the constant quantity Log a

The learned Pandit makes use of these and other facts to interweave Western with Eastern science, and to lead his country-men to move onward from the basis of truth they already possess Pandit Sudhakara Dvivedi has done something to advance scientific knowledge in India, and it is to be hoped that he will be encouraged to redeem his promise and complete a series of work on Analytical Geometry, the Integral Calculus, and Quaternions The Indian Government would do wisely by circulating this admirable book among the native students at colleges, and especially among private students in the Hindi area of Northern India —*The Overland Mail, Feb 4, 1887*

A REALLY remarkable book on the differential Calculus has just been published at Benares, which ought to be made known to Europe It is called *Chalana Kalana*, and it is written by Pandit Sudhakara Dvivedi, of the Sanskrit College, Benares

It is the first forward step that India has made in independent scientific research in modern times , and the author deserves the highest praise for the masterly manner in which he has dealt with his difficult subject He has placed it in the power of Indian mathematicians to carry their studies to a very high point in their native Hindi , and he has done this not by merely translating an English mathematical work, but by writing an entirely new treatise, deduced from the discoveries of Descartes, Newton, Leibnitz, Bhaskaracharya and others The methods of these authorities are transfused into Indian processes, thereby enabling native scholars to follow Western methods and reasoning with confidence and intelligence He utilises a method of dealing with variables, devised by Bhaskaracharya, which is practically identical with that of the differential calculus , and he cites other correct processes which that admirable old astronomer was able to formulate In this skilful way the author grafts Western science on to the Indian mind , while, in the general plan of his work, he follows Todhunter's well-known treatise Originality is likewise shown by the author's simplification of Todhunter's method of treating vanishing fractions ; and in the sections he has appended on analytical geometry and conic sections—additions rendered necessary by the fact that no treatise on them exists in the Hindi language

The Pandit promises a series of works on the higher branches of mathematics, dealing fully with analytical geometry, the integral calculus, and quaternions He has shown in the present work that he thoroughly understands his subject , and it is to be hoped, for the advancement of science, that he will succeed in directing the acute reasoning powers of Indians to the mathematical and scientific problems of the Western world —*The Academy Feb* 12, 1887. F P

In view of the aptitude for numerical calculation which the Hindus are acknowledged to possess in a marked degree, it seems singular that India, in modern days,

All the above assumptions that are described by the mathematicians can hardly be apprehended unless it is known that

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \text{Log}\ (x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$$

Therefore I have described a new method in article 9, thus

Let $\int \frac{dx}{f(x)} = \text{Log}\ \{ y + f(x) \}$ where y is a function of x, here the form of $f(x)$ is to be found.

By differentiating the above equation with respect to x

$$\frac{dx}{f(x)} = \frac{f'(x)\ dx + dy}{f(x) + y}$$

$$\therefore f(x)\ dx + y dx = f(x)\ f'(x) dx + f(x) dy$$

By transposing

$$f(x)dx - f(x)dy = \{ f(x) \} \{ dx - dy \} = f(x) f'(x)\ dx - y dx$$

$$= \{ f(x)\ f'(x) - y \}\ dx$$

By division

$$\frac{dx}{f(x)} = \frac{dx - dy}{f(x) f'(x) - y} = \frac{dx - dy}{x - y},$$

---

and specially during the period in which it has been subject to the English, with their free-handed educational encouragement, should have contributed so little to the development of mathematical science It was not destined, however, that Bhaskaracharya, Brahmagupta, and their compeers of ages far remote should be wholly without their nineteenth century successors Ramachandra, a native of Delhi, besides translating numerous works on mathematics, including the higher, from English into Urdu produced, a generation ago, at least one work in the same language, distinguished by accredited originality Reference is here intended to his 'Problems of Maxima and Minima,' the second edition of which, prefaced by the late Prof De Morgan, was published in London in 1859, under the auspices of the Court of Directors, who signified their appreciation of it by presenting its author with £200, after their liberal fashion And now we have to announce the appearance last year, of a kindred treatise, but one of much ampler scope, 'Chalana-kalana,' bearing the alternative title of "A Hindi Treatise on the Differential Calculus" This admirably printed volume, extending to nearly 500 pages, has for its author Pandit Sudhakara Dvivedi, Librarian of the Sanskrit College at Benares The learned Pandit, already favourably known as a mathematician by what he has written, in Sanskrit, on the properties of the ellipse, lays claim to the introduction of many new methods, over and above demonstrating the validity of a certain method which had previously been pronounced unsound. In an English preface, abounding with interesting facts and criticisms, he gives it as his opinion that Bhaskaracharya, who, though he flourished in the twelfth century, is supposed to have been indebted for nothing to European sources, "was in no way inferior to Archimedes, in respect of his methods of differential calculus." As the Pandit expresses himself with perfect clearness in our language, it is due to his reputation that he should render into it those portions of his treatise in which, as he alleges, he has improved on what has been accomplished by his predecessors—Mr Todhunter and Mr Hall, in particular —*The Nation* Feb 10, 1887,

if $f(x)\, f'(x) = x$,

$\therefore \int \frac{dx - dy}{x - y} = \int \frac{dx}{f(x)}$ i e. Log $(x - y)$ = Log $\left\{ f(x) + y \right\}$,

$\therefore\ x - y = f(x) + y$ or $y = \frac{x - f(x)}{2}$ and $\int \frac{dx}{f(x)}$ Log $\left\{ f(x) + y \right\}$

= Log $\left\{ \frac{f(x) + x}{2} \right\}$ = Log $\left\{ f(x) + x \right\}$,

where the constant Log 2 is omitted.

Thus a theorem has been framed that when $f(x) \times f'(x) = x$ then

$\int \frac{dx}{f(x)}$ = Log $\left\{ f(x) + x \right\}$,

In $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$, $f(x) = \sqrt{x^2 \pm a^2}$

$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$ and $f(x)\, f'(x) = x$

$\therefore \int \frac{dx}{f(x)} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$

= Log $\left\{ f(x) + x \right\}$ = Log $(\sqrt{x^2 \pm a^2} + x)$, by my method.

In like manner many other new methods have been described.

I have added many important theorems with numerous interesting examples regarding the Calculus of Variation and Dynamics of a Particle at the end of this book.

It is advisable for the beginners first to read carefully the Differential Calculus, then to begin the Integral Calculus, otherwise it is impossible for them to understand the latter

In conclusion, I earnestly request all learned gentlemen to understand, that the book is not written to show off talent, but to encourage and incite our own countrymen towards the cultivation of Western science. Why should we not improve our own language and advance our own countrymen with the aid of Western science to the attainment of which we are applying our heart and soul ?

Now-a-days there being more mutual communication between Europeans and Indians, the Europeans are very much interested in the study of Sanskrit and Hindi. Therefore this treatise will be also useful to those Europeans who are interested in the history and development of Indian Mathematics.

I shall consider my labour not to have been in vain, even if my treatise should have no other result than to incite others to criticise my work and to produce more perfect treatises on the subject.

SUDHÁKARA DVÎVEDÎ

किञ्चिन्निवेदनम्

वाराणसेयराजकीयसंस्कृतपरीक्षायां गणितपरीक्षापाठ्यग्रन्थेषु गुरुवर म. म. सुधाकरद्विवेदिनश्चलराशिकलनस्य निर्धारणं जातम् । १९९५ ईशवीये वर्षे राजकीयाज्ञया मुद्रितस्यास्य ग्रन्थरत्नस्यालभ्यत्वेन पुनर्मुद्रणस्यावश्यकत्वात् सरस्वतीभवनसिरीजाध्यक्षैस्तत्रैवास्य मुद्रणं समाज्ञप्तम् । गणितविषये प्रतिदिनं समुन्नतिर्दृश्यते, अतः १९९५ ईशवीये मुद्रिते पुस्तके या शैली स्वीकृता तत्रेदानीं बहुत्र परिवर्त्तनं जातम् । तथापि परमविद्वद्भिर्महामहोपाध्यायैः स्वीकृतां शैलीं परिरक्ष्यैवास्य मुद्रणं संपादितम् । ग्रन्थान्ते प्राचीननवीनपरिपाट्योर्भेदं ग्रन्थग्रन्थिमोचनं च यथामति प्रदर्शयिष्ये । अतिशीघ्रतया संमुद्रितेऽस्मिन् दृष्टिदोषात्कण्टकदोषाद्वा यदि कुत्रापि त्रुटिः संलक्षिता भवेत्तत्कृपया क्षमणीयोल्लेख्या च कृपालुभिर्विद्वद्भिः । अत्र हृदयतः काशिकराजकीयसंस्कृत महाविद्यालयाध्यक्षेभ्यः परमविद्यारसिकेभ्यो विद्वद्वरेभ्यो डा० श्रीमङ्गलदेवशास्त्रिवर्येभ्यो धन्यवादान् वितरामि येषां कृपालवेनैवेदानीं गणितशास्त्रस्याभ्युदयो दृश्यते संस्कृतविद्याजगति ।

इति निवेदयते

बलदेवमिश्रः

विषयसूचनिका (Contents)

भूमिका ।

चलनकलन (Differential calculus) की भूमिका में विशेष रूप से लिख आये हैं कि यूरप में यह विद्या कैसे फैली और भारतवर्ष में सब से पहले किस विद्वान् के ग्रन्थ में चलनकलन (Differential Calculus) और चलराशिकलन (Integral Calculus) संबन्धी सिद्धान्त पाये जाते हैं। यहां पर इतना ही आवश्यक समझ कर लिखा जाता है कि विद्वान् लोग यह न समझें कि यह ग्रन्थ किसी अङ्गरेज़ी ग्रन्थ का अनुवाद और संक्षिप्त रूप है किन्तु जिसमें पढ़ने वालों को सब सिद्धान्तों से भली भांति परिचय हो जाय और उदाहरणों के उत्तर निकालने में संशय न हो इस लिये इसमें थोड़ा बहुत जहां तक हो सका है चलराशिकलन (Integral Calculus) संबन्धी सभी सिद्धान्तों को उदाहरण समेत यूरप की युक्ति और अपनी कल्पना के बल से नूतन लघु प्रकार से दिखलाया है।

जैसे $\int \frac{ताय}{\sqrt{य^2 \pm अ^2}}$ इसकी सिद्धि के लिये टाडहण्टर (Todhunter) साहब और विलियम्सन (Williamson) साहब ने $\sqrt{य^2 \pm अ^2} = ल—य$, यह कल्पना किया। हाइमर्स (Hymers) ने $\sqrt{य^2 \pm अ^2}$

$= \frac{(\sqrt{य^2 \pm अ^2})(य + \sqrt{य^2 \pm अ^2})}{य + \sqrt{य^2 \pm अ^2}}$ ऐसा कर तब चलराशि को सिद्ध किया। प्रोफेसर डिमार्गन (Demorgan) ने पहले $\sqrt{य^2 \pm अ^2} = र$ तय $य^2 \pm अ^2 = र^2$ $\therefore$ २य ताय = २र तार वा यताय = रतार इस लिये यताय + रताय $=$ र तार + र ताय $\therefore$ ताय $= \frac{र (तार + ताय)}{य + र}$

इसका उत्थापन देने से

$$\int \frac{ताय}{\sqrt{य^2 \pm अ^2}} = \int \frac{र \ (तार + ताय)}{र \ (य + र)} = \int \frac{ताय + तार}{य + र} = ला \ (य + र)$$

प्रोफेसर डिमार्गन (Demorgan) ने असंभव संख्या का भी उत्थापन दे कर $\int \frac{ताय}{य^2 + अ^2}$ इस का मान इस प्रकार से सिद्ध किया है कि

$$\int\frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}^2+\text{अ}}}=\int\frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{अ}^2-(\text{य}\sqrt{-१})^2}}=\frac{१}{\sqrt{-१}}\int\frac{\text{ताय}\sqrt{-१}}{\sqrt{\text{अ}^2-(\text{य}\sqrt{-१})^2}}$$

$=\frac{१}{\sqrt{-१}}\text{ज्या}^{-१}\frac{\text{य}\sqrt{-१}}{\text{अ}}$ परन्तु डेमाइवर के सिद्धान्त से

$\text{कोज्याष}-\text{ज्याप}\sqrt{-१}=\text{इ}^{-\text{ष}\sqrt{-१}}$

$\text{वा,}-\text{ष}\sqrt{-१}=\text{ला}\,(\text{कोज्याप}-\text{ज्याष}\sqrt{-१})$

कल्पना करो कि

$\text{ज्याष}=\frac{\text{य}}{\text{अ}}\sqrt{-१},\ \text{कोज्याप}=\sqrt{१+\frac{\text{य}^2}{\text{अ}^2}}\,।-\sqrt{-१}=\frac{१}{\sqrt{-१}},\ \text{प}=\text{ज्या}^{-१}\frac{\text{य}\sqrt{-१}}{\text{अ}}$

$\text{वा,}\ \frac{१}{\sqrt{-१}}\text{ज्या}^{-१}\frac{\text{य}\sqrt{-१}}{\text{अ}}=\text{ला}\left(\sqrt{१+\frac{\text{य}^2}{\text{अ}^2}}-\frac{\text{य}}{\text{अ}}(\sqrt{-१})\right)^2$

$=\text{ला}\,(\sqrt{\text{अ}^2+\text{य}^2}+\text{य})-\text{ला अ}$ स्थिराङ्क को निकाल देने से पहिले ही के ऐसा फल उत्पन्न हुआ।

ऊपर जितनी युक्तियाँ दिखलाई गई हैं वे कभीं मन में नहीं आ सकतीं जब तक यह ज्ञान न हो कि $\int\frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}^2\pm\text{अ}^2}}=\text{ला}(\sqrt{\text{य}^2\pm\text{अ}^2}+\text{य})$ इस लिये यहाँ पर हमने नया यह प्रकार ९वें प्रक्रम में लिखा है कि

कल्पना करो कि $\int\frac{\text{ताय}}{\text{फ(य)}}=\text{ला}\{\text{फ(य)}+\text{र}\}$ जहां र, य का कोई फल है तो तात्कालिक गति से $\frac{\text{ताय}}{\text{फ(य)}}=\frac{\text{फ}'\text{(य)ताय}+\text{तार}}{\text{फ(य)}+\text{र}}\ \therefore\ \text{फ(य)ताय}+\text{तायर}$ $=\text{फ}'\text{(य)ताय फ(य)}+\text{तार फ(य)}$ पक्षान्तरानयन और परस्पर भाग देने से $\frac{\text{ताय}-\text{तार}}{\text{फ}'\text{(य)फ(य)}-\text{र}}=\frac{\text{ताय}}{\text{फ(य)}}$ अब यहाँ यदि $\text{फ}'\text{(य)फ(य)}=\text{य}$ तो

$$\frac{\text{ताय}-\text{तार}}{\text{य}-\text{र}}=\frac{\text{ताय}}{\text{फ(य)}}\ \therefore\int\frac{\text{ताय}-\text{तार}}{\text{य}-\text{र}}=\int\frac{\text{ताय}}{\text{फ(य)}}$$

$$\text{वा ला(य}-\text{र)}=\text{ला}\{\text{फ(य)}+\text{र}\}$$

$$\therefore\ \text{य}-\text{र}=\text{फ(य)}+\text{र}$$

$$\text{र}=\frac{\text{य}-\text{फ(य)}}{२}\ \text{और}\ \text{फ(य)}+\text{र}=\frac{\text{य}+\text{फ(य)}}{२}$$

इसलिये $\int \frac{ताय}{फ(य)} = ला\left(\frac{य+फ(य)}{२}\right) = ला\{य+फ(य)\} - ला\ २$

ला २ स्थिराङ्क को निकाल देने से

$\int \frac{ताय}{फ(य)} = ला\{य+फ(य)\}$ यह एक सिद्धान्त उत्पन्न हुआ अर्थात् $\int \frac{ताय}{फ(य)}$ इसका मान अवश्य ला $\{य+फ(य)\}$ इसके तुल्य होगा यदि $फ(य)फ'(य) = य$ हो तो।

गणितज्ञों के बीच स्पष्ट है कि मेरा प्रकार एक प्रकार का सिद्धान्त है जो कि नियम से दिखलाता है कि जहाँ जहाँ $फ(य)\,फ'(य) = य$ ऐसा होगा तहाँ तहाँ ही चलराशि का मान ला $\{य+फ(य)\}$ यह होगा।

इसी प्रकार इस ग्रन्थ में बहुत नई युक्तियाँ दिखलाई गई हैं।

इस के अन्त में वैशेषिकलन (Calculus of variations) और एक परमाणु की गतिविद्या (Dynamics of a particle) के भी अनेक सिद्धान्त लिखे गये हैं जिनके बल से अनेक चमत्कृत उदाहरण के उत्तर सहज में निकल आते हैं।

विद्यार्थियों के अभ्यास के लिये इसमें अनेक उदाहरण लिखे गये हैं जिनके अभ्यास से सब सिद्धान्तों से भली भाँति परिचय हो सकता है।

विद्यार्थियों को चाहिये कि पहले चलनकलन (Differential Calculus) को अच्छी तरह से सीखकर तब इसको पढ़ें अन्यथा इसका आना अत्यन्त दुर्घट है।

अन्त में विद्वानों से यह सविनय प्रार्थना है कि मैंने अपनी पाण्डित्य दिखलाने के लिये इस ग्रन्थ को नहीं बनाया है किन्तु अपने देशवासियों के हृदय में यूरोप की विद्या का विशेष उत्साह दिलाने के लिये कि आप लोग कठिन परिश्रम से तन धन मन देकर जो यूरोप की विद्या सीखी उससे क्यों नहीं अपनी भाषा की पुष्टि कर अपने देश भाइयों का उपकार करते।

भारतवर्ष में यूरप के लोगों का अब विशेष संवन्ध होने से यूरप के विद्वान् लोग भी संस्कृत और हिन्दी की ओर विशेष ध्यान देने लगे इसलिये यूरप के लोगों को भी हिन्दी में यह नया ग्रन्थ यूरोपियन रीति से कहाँ कहाँ बिशेष बातें प्रकाश करता है इसका परिचय करने के लिये इस ग्रन्थ को पढ़ने से विशेष उपकार होगा।

यदि विद्वान् लोग खण्डन की बुद्धि से भी मेरे ग्रन्थ को एक वार आद्यन्त पढ़ेंगे तो भी मैं अपने परिश्रम को सफल समझूंगा।

दोहा।

गणित पयोनिधि सविधि मथि काढ़ी सुधा सुहीर।
अणित सुधाकर नहिं सुधा वसुधा मधि है धीर ॥ १ ॥
कल[1] न परत निज कलन[2] सों कलन[3] बिना जौं तात।
कल[4] न कहहु कल[5] कलन[6] हित कलन[7] देहु येहि प्रात ॥ २ ॥

सुधाकर द्विवेदी।



---

१ कल = विश्राम, = आराम = चैन।
२ कलन = करन = कर (हाथ) का बहुवचन।
३ कलन = कलना = गणना = हिसाब करना।
४ कल दूसरा आनेवाला दिन।
५ कल = सुन्दर = बढ़ियाँ।
६ कलन = चलराशिकलन = यह ग्रन्थ।
७ कलन = करन = कर्ण = कान ।

विशेष वर्णन ।

अध्याय १ ।

द्वितीयाध्याय २ ।

तृतीयाध्याय ३ ।

चतुर्थाध्याय ४ ।

श्रीः ।

श्रीजानकीवल्लभो विजयते ।

चलराशिकलन ।

श्लोक ।

यल्लीला विमला विलोक्य विपुलप्रालेयबालालये
भूपालेन्द्रललाटलालनकलालेपाङ्कितक्ष्मातले ।
उल्लङ्घ्य स्वकुलालिकूलकलितां लज्जानदीं मैथिली
यल्लोकाऽऽकुलिता चचाल चलवद्रामाय तस्मै नमः ॥१॥

१ प्र० । जैसे चलनकलन में स्वतन्त्रराशि के फलों पर से उनकी तात्कालिकी गति जानने के लिये अनेक प्रकार का वर्णन है उसी प्रकार से इस चलराशि-कलन में फलों की तात्कालिकी गति पर से उन फलों के जानने के लिये अनेक प्रकार लिखे हैं। ऐसी दशा में चलराशिकलन को चलनकलन का उलटा कह सकते हैं ॥

२ । कल्पना करो कि फ(य) का तात्कालिक संबंध फा(य) है तो चलनकलन से $\frac{फ(य+च)—फ(य)}{च} = फा(य) + अ_1$ (यहां जब च = ० = ताय तो $अ_1 = ०$) इस लिये

$$फ(य+च)—फ(य) = च\{फा(य) + अ_1\}$$
$$फ(य+२च)—फ(य+च) = च\{फा(य+च) + अ_2\}$$
$$फ(य+३च)—फ(य+२च) = च\{फा(य+२च) + अ_3\}$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$फ(य+न च)—फ\{य+(न—१)च\} = च[फा\{य+(न—१)च\} + अ_न]$$

दोनों पक्षों को जोड़ने से

$$फ(य+न च)—फ(य) = च\{फा(य) + फा(य+च) + \cdots\}$$
$$+ च(अ_1 + अ_2 + अ_3 + \cdots\}$$

इस में य, य+च, य+२ च,……य+नच, इत्यादि के स्थान में अ, इ, उ,…..क इत्यादि का उत्थापन देने से

फ (क)-फ(अ) = च { फा(अ) + फा(इ) + फा(उ) + … } + च(अ१ + अ२ + …)

अब यहाँ यदि च = ० अर्थात् ताय के समान कल्पना करो तो

फ (क)—फ(अ) = फा (अ) ताय + फा (इ) ताय + फा (उ) ताय + …

ऐसा होगा। यहां जब य + नच = क और य = अ, ∴ $\frac{\text{क}-\text{अ}}{\text{न}}$ = च इससे यह सिद्ध होता है कि फल के तात्कालिक संबंध में स्वतन्त्र राशि के स्थान में क्रम से अ, अ + $\frac{\text{क}-\text{अ}}{\text{न}}$, अ + २ $\frac{\text{क}-\text{अ}}{\text{न}}$, अ + ३$\frac{\text{क}-\text{अ}}{\text{न}}$,…क—च, का उत्थापन देकर अलग अलग मान ले आवो फिर उन मानों को च से गुणकर जोड़ दो, योग में च के स्थान में शून्य अर्थात् ताय का उत्थापन दो तो योग, फल के उन दो मानों के अन्तर के तुल्य होगा जो कि स्वतन्त्रराशि के स्थान में अ, और क के उत्थापन से उत्पन्न होंगे। इस योग को संस्कृत में आढ्य भी कहते हैं इस लिये लाघव से आढ्य के आदि अक्षर को लुप्ताऽकार के रूप में लिखने से पूर्व योग को $\int_{\text{अ}}^{\text{क}}$ फा (य) ताय ऐसे लिख सकते हैं। यहां $\int_{\text{अ}}^{\text{क}}$फा (य) ताय इस से यह समझना चाहिये कि फा(य)ताय के य के स्थान में अ, अ + ताय, अ + २ ताय, अ + ३ ताय,…क—च, का उत्थापन देने से, जितने मान हैं उन सब का योग है। इस लिये प्रकारान्तर से जो योग पहले सिद्ध हुआ है इसे उसके समान करने से

फ(क)—फ(अ) = $\int_{\text{अ}}^{\text{क}}$फा(य)ताय ऐसा हुआ। इस में यदि क के स्थान में य, और अ के स्थान में शून्य का उत्थापन दें तो फ(य)—फ(०) = $\int_{0}^{\text{य}}$ फा(य)ताय…(१)

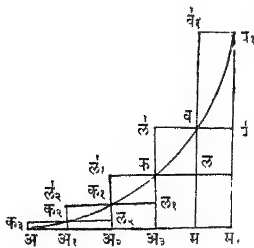
३। चलनकलन से सिद्ध है कि फ(य) में केवल य चलराशि है और स्थिराङ्क हैं इस लिये फ(य) में य के स्थान में शून्य का उत्थापन देने से फ (०) यह अवश्य शून्य वा किसी स्थिराङ्क के तुल्य होगा। इस स्थिराङ्क को यदि स्थि

कहो तो दूसरे प्रक्रम का (१) समीकरण फ(य)—स्थि = $\int_0^{य}$ फा (य)ताय ऐसा हुआ इस में पक्षान्तरानयन से फ(य) = $\int_0^{य}$फा(य)ताय + स्थि इसे लाघव से फ(य) = $\int$फा(य) ताय + स्थि ऐसा लिखते हैं।

४। जब फ(य) = $\int$फा(य)ताय + स्थि तो दोनों की तात्कालिकी गति निकालने से ता { फ(य) } = फा(य)ताय = ता { $\int$फा(य)ताय + स्थि } = ता { $\int$फा(य)ताय } + तास्थि = ता { $\int$फा(य) ताय } इस लिये $\int$फा(य) ताय यह अवश्य फ(य) के समान हुआ। इस पर से यह भी कह सकते हो कि जिस फल की तात्कालिकी गति फा(य)ताय है वह फल $\int$फा(य) ताय के समान है वा $\int$फा(य)ताय + स्थि इसके समान है।

चलराशिकलन का अभिप्राय।

५। नीचे लिखे हुए उदाहरण से विद्यार्थियों को स्पष्ट ज्ञान पड़ेगा कि चलनकलन और चलराशिकलन में क्या भेद है।



कल्पना करो कि अक$_2$क$_1$कव एक ऐसा वक्र है (जिसमें अ म = य, और व म = र,) कि जिसके भुज, कोटि और चापसे जो वक्र त्रिभुज उत्पन्न होता है उस का क्षेत्रफल सर्वदा इ गुणित भुजघन के समान होता है तो बतावो कि य भुज में कोटि का क्या मान है? यहाँ इ कोई स्थिर संख्या है।

कल्पना करो कि अम = य, वम = र, तो अवम वक्रत्रिभुज का फल प्रश्न के अनुसार इय^3 और अव$_1$म$_1$ का क्षेत्रफल इ(य + मम$_1$)^3 होगा इस लिये इन दोनों का अन्तर, तुल्य हुआ व$_1$ व म म$_1$ के, अधिक हुआ वव$'$म$_1$म आयत से और अल्प हुआ व$'_1$ व$_1$म$_1$ म आयत से तब

$$इ\,(य + म\,म_1)^3 — इ.य^3 > वम \times मम_1 \text{ और} < व_1म_1 \times मम_1$$

म म$_1$ का भाग दे देने से $व_1म_1 > इ\left\{\frac{(य + म\,म_1)^3 — य^3}{म\,म_1}\right\} < वम$, इसमें

यदि मम$_1$ = ० तो व$_1$म$_1$ = वम और $इ\left\{\frac{(य + मम_1)^3 — य^3}{म\,म_1}\right\} = \frac{ता}{ताय}\,(इय^3)$

चलनकलन से । इस लिये चलनकलन से यह बात सिद्ध होती है कि फल के तात्कालिकसंबंध के समान र का मान है अर्थात् र = ३ इ $य^2$ । इस प्रकार इस प्रश्न का उत्तर चलनकलन से सिद्ध हुआ ।

अब इसी वक्र में यदि ऐसा प्रश्न किया जाय कि एक वक्रक्षेत्र की कोटि गुणित त्रिगुणितभुजवर्ग के तुल्य है तो भुज, कोटि और वक्र के चाप से जो त्रिभुज होगा उसका क्या क्षेत्रफल होगा? । इस का क्षेत्रफल जानने के लिये अ म = य, का न तुल्य समान विभाग करो और मानो कि उन विभागों का मान क्रम से अ $अ_1$, $अ_1$ $अ_2$ $अ_2$ $अ_3$, $अ_3$ म, हैं जहाँ $\frac{य}{न}$ = अ $अ_1$ = $अ_1$ $अ_2$ = $अ_2$ अ = $अ_3$म, तो वक्रक्षेत्र के लक्षण से $क_2$ $अ_1$ = ३ इ $\left(\frac{य}{न}\right)^2$, $क_1$ $अ_2$ = ३इ $\left(\frac{२य}{न}\right)^2$, ..., व म = ३ इ $\left(\frac{न.य}{न}\right)^2$, इन सब को $\frac{य}{न}$ से गुण कर जोड़ देने से, $क_1$ $अ_1$, $ल'_2$ $अ_2$, इत्यादि आयतों के क्षेत्रफल का योग

$$= ३ इ \frac{य}{न}\left(\frac{य}{न}\right)^2 + ३इ \frac{य}{न}\left(\frac{२य}{न}\right)^2 + \cdots + ३ इ\frac{य}{न}\left(\frac{नय}{न}\right)^2$$

$$= ३इ\frac{य^3}{न^3}\left(१ + ४ + ९ + \cdots + न^2 \right) = ३ इ \frac{य^3}{न^3} \frac{न}{२} (न + १) \frac{(२न + १)}{३}$$

$$= ३इ\frac{य^3}{२न^2} \left(\frac{२ न^2 + ३न + १}{३}\right) = इ \frac{य^3}{२} \left(२ + \frac{३}{न} + \frac{१}{न^2}\right)$$

इस समीकरण में ज्यों ज्यों न की संख्या बढ़ाते जायँगे त्यों त्यों $क_1$, $ल'_2$, $ल'_1$ इत्यादि वक्र के पास पास आते जायँगे इस लिये यदि न = $\frac{१}{०}$ तो ठीक वक्रत्रिभुज का फल = इ$य^3$ हुआ परन्तु यदि इस का तात्कालिक संबंध निकालो तो $\frac{ता}{ताय}$ (इ $य^3$) = ३ इ $य^2$ यह तात्कालिक संबंध वक्र की कोटि के समान होता है इस लिये ४ प्रक्रम से इ$य^3$ = $\int$३ इ $य^2$ताय ऐसा हुआ ।

इस से यह सिद्ध होता है कि यदि तात्कालिक संबंध को उस वक्र की कोटि कल्पना करें जो कि मूलबिन्दु में होकर जाता हो तो जिस फल का यह तात्कालिक संबंध है वह फल उस वक्र त्रिभुज का फल होगा जो कि भुज, कोटि और वक्र के चाप से बनता है । अब जिस प्रकार से—

३ इ $य^2$ ताय पर से इ$य^3$ का मान निकले उस प्रकार का जो वर्णन करे उसको चलराशिकलन कहते हैं । इस उदाहरण से स्पष्ट है कि यदि चलनकलन,

और चलराशिकलन का लक्षण लाघव से कहें तो ऐसा होगा कि स्वतन्त्रराशि के फल पर से उसकी तात्कालिकी गति ले आवे उसे चलनकलन और तात्कालिकी गति पर से जो स्वतन्त्रराशि का फल ले आवे उसे चलराशिकलन कहना चाहिये।

६। चलनकलन से सिद्ध है कि ता { फ(य) + स्थि } = ताफ (य) इस लिये $\int$ ताफ(य) = फ(य), वा फ (य) + स्थि इस से यह समझना चाहिये कि तात्कालिकी गति पर से जो फल निकलता है उसमें यदि स्थिर संख्या जोड़ दें तो जोड़े हुए फल की भी वही तात्कालिकी गति आवेगी परन्तु चलराशिकलन से तात्कालिकी गति पर से जो फल आते हैं वे शुद्ध विना स्थिर के जोड़े आते हैं। विद्यार्थियों को चाहिये कि सर्वत्र जहां तात्कालिकी गति पर से चल-राशिकलन के प्रकार से फल सिद्ध हो वहां उस फल में कोई स्थिरसंख्या भी जोड़ें जिस स्थिर का मान, फल में स्वतन्त्रराशि के स्थान में शून्य का वा किसी विशेष संख्या का उत्थापन देने से, ज्ञात हो सकता है। जैसे ५ प्रक्रम के उदाहरण में फल = $\int$ ३ इय^{२} ताय = फ + स्थि = इय^{३}। अब फ + स्थि = इय^{३} इस समीकरण में यदि य = ० तो क्षेत्र देखने से स्पष्ट है कि क्षेत्र-फल शून्य होगा

$\therefore$ ० + स्थि = इ (०)^{३} $\therefore$ स्थि = ०, इसी प्रकार स्वतन्त्रराशि में ऐसी संख्या का उत्थापन देना चाहिये जिसमें फल का मान व्यक्त हो फिर उस मान पर से स्थिराङ्क का ज्ञान शीघ्र हो जायगा।

७। चलनकलन की विपरीत क्रिया से स्पष्ट है कि,

$$\int \text{स्थिफ(य)ताय} = \text{स्थि}\int \text{फ(य) ताय}\cdots$$

$$\int \{ \text{फ(य)ताय} + \text{फा(य) ताय} \} = \int \text{फ(य) ताय} + \int \text{फा(य) ताय}$$

$$\int \text{य}^{\text{म}}\text{ताय} = \frac{\text{य}^{\text{म}+१}}{\text{म}+१}, \int \frac{\text{ताय}}{\text{य}} = \text{लाय}।$$

$$\int \text{अ}^{\text{य}}\text{ताय} = \frac{\text{अ}^{\text{य}}}{\text{ला}_{\text{इ}}\text{अ}}, \int \text{इ}^{\text{य}}\text{ताय} = \text{इ}^{\text{य}}।$$

$$\int \text{ज्यायताय} = -\text{कोज्याय}, \int \text{कोज्यायताय} = \text{ज्याय}।$$

$$\int \frac{\text{ताय}}{\text{कोज्या}^{२}\text{य}} = \text{स्प य}, \int \frac{\text{ताय}}{\text{ज्या}^{२}\text{य}} = -\text{कोस्पय}।$$

$$\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{अ}^{२}-\text{य}^{२}}} = \text{ज्या}^{-१}\frac{\text{य}}{\text{अ}} \text{ वा} = -\text{कोज्या}^{-१}\frac{\text{य}}{\text{अ}}$$

$$\int \frac{\text{ताय}}{\text{अ}^2 + \text{य}^2} = \frac{1}{\text{अ}} \text{स्प}^{-1} \frac{\text{य}}{\text{अ}} \text{ वा } = -\frac{1}{\text{अ}} \text{कोस्प}^{-1} \frac{\text{य}}{\text{अ}}$$

८। इनका स्मरण होने के लिये श्लोक और दोहे ।

श्लोक ।

चलः स्थिरघ्नविहृतश्चलोऽन्यो यदि तद्गतिः ।
तुल्याऽऽद्यचलगत्या स्यात् स्थिरघ्नहृतया तया ॥ १ ॥
यद्गतिर्भुक्तियोगेन समा स्याद्यत्र तन्मितिः ।
भुक्त्युत्थचलयोगेन समाना चलकोविद ॥ २ ॥
सैकघातश्चलस्यामः सैकतद्घातसंख्यया ।
चलोऽन्यो यद्गती राशिघातराशिजवाहतिः ॥ ३ ॥
यस्य भुक्तौ हरगतिर्लवमानं भवेद्धि सः ।
हरस्य लघुरिक्थेन समानो भवति ध्रुवम् ॥ ४ ॥
चलराशिसमः स्थिराङ्कघातः
प्रथमस्तद्धतराशिभुक्तिरस्ति ।
अपरस्य गतिस्तदा स्थिराङ्क—
लघुरिक्थाप्त इहाऽऽद्य एव चान्यः ॥ ५ ॥
चलज्या गुणिता भुक्तिर्यद्गतिस्तन्मितिर्भवेत् ।
चलकोटिज्यया तुल्या क्षयगा चलयुक्तितः ॥ ६ ॥
चलकोटिज्यया निघ्नी भुक्तिर्यस्य गतिर्भवेत् ।
चलजीवासमानं तन्मानं ज्ञेयं मनीषिभिः ॥ ७ ॥
चलकोटिज्यकावर्गभक्ता भुक्तिर्हि यद्गतिः ।
चलजस्पर्शरेखैव तन्मानं स्याच्चलोक्तितः ॥ ८ ॥
चलज्याकृतिसंभक्ता भुक्तिर्यस्य गतिर्भवेत् ।
तन्मानं चलजा कोटिस्पर्शरेखा क्षयात्मिका ॥ ९ ॥
राशिवर्गोनितस्थैर्यवर्गमूलहृता गतिः ।
यद्गतिस्तन्मितिः स्थैर्यभक्तराशेर्धनुर्भवेत् ॥ १० ॥
स्थिरचञ्चलवर्गयोगभक्ता
गतिरस्तीह गतिर्यदान्यराशेः ।
स्थिरभक्तचलस्य यद्धनुर्भा—
शकलैस्तत्स्थिरभक्तमन्यमानम् ॥ ११ ॥

दोहा।

जौं चल थिर से गुणित वा भाजित हो चल आन।
आदि गती स्थिरगुणित वा भाजित ता गति जान ॥ १ ॥
कइ गति के युति तुल्य हो जाकी गति ता मान ।
सब गति के चल योगसम जानहु सकल सुजान ॥ २ ॥
राशिघातहत राशिगति जाकी गति सो जान ।
सैकघात हृत राशि को सैकघातसम मान ॥ ३ ॥
जाकी गति में हर गती अंशमान जो होय ।
ई अधार लघुरिक्थ जो हर को है वह सोय ॥ ४ ॥

चौपाई।

चलराशी सम थिर को घाता। आदि सो गुणित राशिगति ताता ॥
जाकी गति सो आदि प्रमाना। थिर लघुरिक्थ विभाजित जाना ॥ ५ ॥

दोहा।

चलजीवा से गुणित चलगति जाकी गति होय।
चलकोटिज्या के करहु ऋण तुम जानहु सोय ॥ ६ ॥
चलकोटिज्यागुणित चलगति जाकी गति होय।
चलजीवा के तुल्य तेहि कहहु युक्ति जिय जोय ॥ ७ ॥
चलकोटिज्यावर्गहृत चलगति जाकी भुक्ति।
स्पर्शरेखिका चलहि को ताहि कहहु लखि सूक्ति ॥ ८ ॥
चलजीवाकृतिभक्त जो चलगति जाकी भुक्ति।
चल को कोटिस्पर्श ऋण रेखा कहु लखि युक्ति ॥ ९ ॥
स्थिरकृति में चलवर्ग ऋण तेहि पदहृत गति होय।
जाकी स्थिरहृत चलहि को चाप कहहु तुम सोय ॥ १० ॥

चौपाई।

स्थिरचञ्चलकृतियोगविभाजित ।
चलगति जाकी गति सो साधित ॥
स्थिरहृत चलको चाप बनावहु।
स्पर्शखण्ड से सो स्थिर भाजहु ॥ ११ ॥

८। इस प्रक्रम में पूर्व प्रकारों का अभ्यास होने के लिये कुछ उदाहरण दिखाते हैं।

उदाहरण।

(१) $\frac{ताय}{\sqrt{य}}$ इस गति की चलराशि ले आवो ?।

यहाँ $\frac{ताय}{\sqrt{य}} = ताय \cdot य^{-\frac{१}{२}} \therefore \int ताय\, य^{-\frac{१}{२}} = २य^{\frac{१}{२}}$, (३ सूत्र से)

२। ताय $(क + अ\, य^{न})^{म} य^{ग}$, इस की चलराशि ले आवो ?।

यहाँ द्वियुक्पदसिद्धान्त से

$$(क + अ\, य^{न})^{म} = क^{म} + मक^{म-१}(अय^{न}) + \frac{म(म-१)}{\underline{|२}} क^{म-२}(अ\, य^{न})^{२} + \cdots$$

$$\therefore ताय(क + अ.य^{न})^{म} य^{ग} = क^{म} य^{ग} ताय + अमक^{म-१} य^{न+ग} ताय$$

$$+ अ^{२} \frac{म(म-१)}{\underline{|२}} क^{म-२} य^{२न+ग} ताय + \cdots$$

$$\therefore \int ताय(क + अ\, य^{न})^{म} य^{ग} = \int क^{म} य^{ग} ताय + \int अमक^{म-१} य^{न+ग} ताय + \cdots$$

$$= क^{म} \int य^{ग} ताय + अ\, म\, क^{म-१} \int य^{न+ग} ताय$$

$$+ अ^{२} \frac{म(म-)१}{\underline{|२}} क^{म-२} \int य^{२न+ग} ताय + \cdots \qquad (२ \text{ सूत्र से})$$

$$= \frac{क^{म}}{ग+१} य^{ग+१} + \frac{अ\, म\, क^{म-१}}{न+ग+१} य^{न+ग+१} +$$

$$\frac{अ^{२}.म\,(म—१)\, क^{म-२}}{(२न+ग+१)\underline{|२}} य^{२न+ग+१} + \cdots (३\text{सूत्र से}$$

३। $\frac{य^{म} ताय}{(अ + क\, य)^{न}}$ इस की चलराशि बतावो ? यहाँ म और न दोनों अभिन्न और धन संख्या हैं।

यहाँ कल्पना करो कि $अ + क\, य = ल \therefore य = \frac{ल—अ}{क}$, और ताय $= \frac{ताल}{क}$।

इन का उत्थापन देने से $\frac{य^{म} ताय}{(अ + कय)^{न}} = \frac{य^{म} ताल}{क.ल^{न}} = \frac{(ल—अ)^{म} ता\, ल}{क^{म+१} ल^{न}}$

$$\therefore \int \frac{य^{म} ता\, य}{(अ + कय)^{न}} = \int \frac{(ल—अ)^{म} ता\, ल}{क^{म+१} ल^{न}} = \frac{१}{क^{म+१}} \int \frac{(ल—अ)^{म} ताल}{ल^{न}},$$

अब इस पर से (द्वियुक्पदसिद्धान्त से) चलराशि जान सकते हो।

४। कोज्या^{२}य. ताय, ज्या^{२}यताय इन की चलराशि क्या हैं ?

यहाँ त्रिकोणमिति से कोज्या^{२}य $= \frac{१ + कोज्या\, २\, य}{२}$, इस लिये

$$\text{कोज्या}^2\text{य ताय} = \frac{१ + \text{को ज्या २ य}}{२}\text{ताय},$$ यहाँ यदि २य = र, तो $\text{ताय} = \frac{\text{तार}}{२}$

$$\therefore \int \text{कोज्या}^2\text{य ताय} = \int\left(\frac{१ + \text{को ज्या२य}}{२}\text{ ताय}\right) = \int\left(\frac{\text{तार}}{४} + \frac{\text{कोज्या र}}{४}\text{तार}\right)$$

$$= \tfrac{१}{४}\int \text{तार} + \tfrac{१}{४}\int \text{कोज्यारतार} = \frac{\text{र} + \text{ज्यार}}{४} = \frac{\text{२ य} + \text{ज्या२य}}{४}$$ (७ सूत्र से)

इसी प्रकार

$$\text{ज्या}^2\text{य ताय} = \frac{१ - \text{कोज्या २ य}}{२}\text{ताय} \therefore \int \text{ज्या}^2\text{य ताय} = \frac{\text{२य} - \text{ज्या२य}}{४}$$

५। $\frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{२अ य} - \text{य}^2}}$ इस की चलराशि क्या है?

कल्पना करो कि य = अ—ल ∴ ताय = -ताल,

और $\sqrt{\text{२ अ य} - \text{य}^2} = \sqrt{\text{२ अ (अ—ल)} - (\text{अ—ल})^2} = \sqrt{\text{अ}^2 - \text{ल}^2}$

$$\therefore \int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{२ अय} - \text{य}^2}} = \int -\frac{\text{ताल}}{\sqrt{\text{अ}^2 - \text{ल}^2}} = \text{कोज्या}^{-१}\frac{\text{ल}}{\text{अ}} = \text{को ज्या}^{-१}\frac{\text{अ—य}}{\text{अ}}$$

$$= \text{उ ज्या}^{-१}\frac{\text{य}}{\text{अ}}$$ (१० सूत्र से)

६। $\frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}^2 + \text{अ}^2}}$ इस की चलसंख्या बतावो?

कल्पना करो कि $\sqrt{\text{य}^2 + \text{अ}^2} = \text{ल—य} \therefore \text{य}^2 - \text{२ य ल} + \text{ल}^2 = \text{य}^2 + \text{अ}^2$

और $\text{य} = \frac{\text{ल}^2 - \text{अ}^2}{\text{२ ल}} \therefore \text{ताय} = \frac{\text{४ ल}^2\text{ताल} - \text{२ ताल (ल}^2 - \text{अ}^2)}{\text{४ ल}^2}$

$= \frac{\text{२ताल}^2\ (\text{ल}^2 + \text{अ}^2)}{\text{४ ल}^2} = \frac{\text{ताल }(\text{ल}^2 + \text{अ}^2)}{\text{२ ल}^2}$, और जब $\text{य} = \frac{\text{ल}^2 - \text{अ}^2}{\text{२ ल}}$

$\therefore \text{ल—य} = \text{ल} - \frac{\text{ल}^2 - \text{अ}^2}{\text{२ ल}} = \frac{\text{ल}^2 + \text{अ}^2}{\text{२ ल}}$ इनका उत्थापन देने से

$$\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}^2 + \text{अ}^2}} = \int \frac{\frac{\text{ताल }(\text{ल}^2 + \text{अ}^2)}{\text{२ल}^2}}{\frac{\text{ल}^2 + \text{अ}^2}{\text{२ ल}}} = \int \frac{\text{ताल}}{\text{ल}} = \text{लाल}$$

$$= \text{ला}(\sqrt{\text{य}^2 + \text{अ}^2} + \text{य})$$ (४ सूत्र से)

७। $\frac{\text{ताय}}{\text{कोज्याय}}$ इस की चलसंख्या बतावो?

$$\int \frac{\text{ताय}}{\text{कोज्याय}} = \frac{\text{कोज्यायताय}}{\text{कोज्या}^{२}\text{य}} = \int \frac{\text{कोज्यायताय}}{१—\text{ज्या}^{२}\text{य}} = \int \frac{\text{ताल}}{१—\text{ल}^{२}} (\text{यदि ल} = \text{ज्याय})$$

$$= \int \frac{१}{२}\left[\frac{\text{ताल}}{१—\text{ल}} + \frac{\text{ताल}}{१+\text{ल}}\right] = \frac{१}{२}\left[\int \frac{\text{ताल}}{१+\text{ल}} — \int \frac{—\text{ताल}}{१—\text{ल}}\right]$$

$$= \frac{१}{२}\left\{\text{ला}\,(१+\text{ल}) — \text{ला}\,(१—\text{ल})\right\} = \text{ला}\sqrt{\frac{१+\text{ज्याय}}{१—\text{ज्याय}}}$$

$$= \text{लाकोस्प}\left[\frac{\pi}{४} — \frac{\text{य}}{२}\right]$$

इसी प्रकार $\int \frac{\text{ताय}}{\text{ज्याय}} = \text{लास्प}\frac{\text{य}}{२}$,

८। $\frac{\text{ताय}}{१^{२}—\text{य}^{२}}$ इसकी चलसंख्या क्या है ?

$\frac{\text{ताय}}{१^{२}—\text{य}^{२}} = \frac{१}{२}\left[\frac{\text{ताय}}{१—\text{य}} + \frac{\text{ताय}}{१+\text{य}}\right]$ ∴ ७ उदाहरण के ऐसा

$\int \frac{\text{ताय}}{१^{२}—\text{य}^{२}} = \frac{१}{२}\text{ला}\frac{१+\text{य}}{१—\text{य}}$, इस में यदि $\text{य} = \text{य}\sqrt{—१}$

तो $\int \frac{\text{ताय}\sqrt{—१}}{१+\text{य}^{२}} = \frac{१}{२}\text{ला}\frac{१+\text{य}\sqrt{—१}}{१—\text{य}\sqrt{—१}}$ वा $\int \frac{\text{ताय}}{१+\text{य}^{२}} = \frac{१}{२\sqrt{—१}}\text{ला}\frac{१+\text{य}\sqrt{—१}}{१—\text{य}\sqrt{—१}}$

परन्तु ११ सूत्र से $\int \frac{\text{ताय}}{१+\text{य}^{२}} = \text{स्प}^{—१}\text{य}$

$$\therefore \quad \text{स्प}^{—१}\,\text{य} = \frac{१}{२\sqrt{—१}}\text{ला}\frac{१+\text{य}\sqrt{—१}}{१—\text{य}\sqrt{—१}}$$

वा, $\text{स्प}^{—१}\text{य} = \frac{१}{२\sqrt{—१}}\text{ला}\frac{१+\text{य}\sqrt{—१}}{१—\text{य}\sqrt{—१}} + \text{स्थि}$

यहां कल्पना करो कि $\text{य} = \text{स्प प}$ ∴ $\text{स्प}^{—१}\text{य} = \text{प}$

इस लिये $\text{ष} = \frac{१}{२\sqrt{—१}}\text{ला}\frac{१+\text{य}\sqrt{—१}}{१—\text{य}\sqrt{—१}} + \text{स्थि}$, यदि $\text{ष} = ०$, तो $\text{य} = ०$. ∴ $\text{स्थि} = ०$

तब $\text{ष} = \frac{१}{२\sqrt{—१}}\text{ला}\frac{१+\text{य}\sqrt{—१}}{१—\text{य}\sqrt{—१}}$

वा $\text{इ}^{२\text{ष}\sqrt{—१}} = \frac{१+\text{स्प ष}\sqrt{—१}}{१—\text{स्पष}\sqrt{—१}} = \frac{\text{कोज्या प} + \text{ज्या प}\sqrt{—१}}{\text{कोज्या ष} — \text{ज्या प}\sqrt{—१}}$

$= \left(\text{कोज्या ष} + \text{ज्या ष}\sqrt{-१}\right)^{२}$

$\therefore$ $इ^{प\sqrt{-१}} = \text{कोज्याष} + \text{ज्याष}\sqrt{-१}$, वा $इ^{-प\sqrt{-१}}$

$= \text{कोज्याष} - \text{ज्याष}\sqrt{-१}$ (चलनकलन में डेमाइवर का सिद्धान्त देखो)

९। $\dfrac{\text{ताय}}{य\sqrt{२ अ य - अ^{२}}}$ इस की चलसंख्या क्या है ?

कल्पना करो कि $२ अ य - अ^{२} = ल^{२}$ $\therefore \dfrac{ल^{२} + अ^{२}}{२ अ} = य$

और $\text{ताय} = \dfrac{२ \text{ लताल}}{२ अ} = \dfrac{\text{लताल}}{अ}$

इस लिये $\int \dfrac{\text{ताय}}{य\sqrt{२ अ य - अ^{२}}} = \int \dfrac{\dfrac{\text{लताल}}{अ}}{\dfrac{ल^{२} + अ^{२}}{२ अ} ल.} = \int \dfrac{२\text{ताल}}{अ^{२} + ल^{२}}$

$= २\int \dfrac{\text{ताल}}{अ^{२} + ल^{२}} = \dfrac{२}{अ}\text{स्प}^{-१}\dfrac{ल}{अ} = \dfrac{२}{अ}\text{स्प}^{-१}\dfrac{\sqrt{२अय - अ^{२}}}{अ}$ (११ सूत्र से)

१०। $\dfrac{\text{ताय}}{अ + क य^{२}}$ इस की चलसंख्या क्या है ?

$\int \dfrac{\text{ताय}}{अ + कय^{२}} = \dfrac{१}{अ}\int \dfrac{\text{ताय}}{१ + \dfrac{क}{अ}य^{२}}$, यहाँ यदि $ल = य\sqrt{\dfrac{क}{अ}}$ तो $य = ल\sqrt{\dfrac{अ}{क}}$

$\therefore \text{ताय} = \text{ताल}\sqrt{\dfrac{अ}{क}}$

इस लिये $\dfrac{१}{अ}\int \dfrac{\text{ताय}}{१ + \dfrac{क}{अ}य^{२}} = \dfrac{१}{अ}\int \dfrac{\text{ताल}\sqrt{\dfrac{अ}{क}}}{१ + ल^{२}} = \dfrac{\sqrt{अ}}{अ\sqrt{क}}\int \dfrac{\text{ताल}}{१ + ल^{२}} =$

$\dfrac{१}{\sqrt{अ क}}\text{स्प}^{-१}ल = \dfrac{१}{\sqrt{अ क}}\text{स्प}^{-१}\left(य\sqrt{\dfrac{अ}{क}}\right)$

११। $\dfrac{\text{ताय}.य^{५}}{१ + य^{२}}$ इस की चलसंख्या क्या है ?

$\dfrac{य^{५}}{१ + य^{२}} = य^{३} - य + \dfrac{य}{१ + य^{२}}$

इस लिये $\int \dfrac{य^{५}\text{ताय}}{१ + य^{२}} = \int य^{३}\text{ताय} - \int य\text{ताय} + \int \dfrac{य\text{ताय}}{१ + य^{२}}$

$$= \frac{\text{य}^{४}}{४} + \frac{\text{य}^{२}}{२} + \frac{१}{२}\text{ला}(१+\text{य}^{२})$$

१२ । $\dfrac{(\text{अ}+\text{क})\ \text{ताय}}{\text{अ य}^{४}+\text{क य}^{२}}$ इस की चलसंख्या क्या है ?

कल्पना करो कि $\text{य} = \dfrac{१}{\text{र}}$ $\therefore$ $\text{ताय} = -\dfrac{\text{तार}}{\text{र}^{२}}$

इस लिये $\dfrac{(\text{अ}+\text{क})\text{ताय}}{\text{अ य}^{४}+\text{क य}^{२}} = -\dfrac{(\text{अ}+\text{क})\text{तार}}{\text{र}^{२}.\text{य}^{२}(\text{अ य}^{२}+\text{क})} = -\dfrac{(\text{अ}+\text{क})\ \text{तार}}{(\text{अ य}^{२}+\text{क})}$

$$= -\frac{(\text{अ}+\text{क})\text{तार}}{\dfrac{\text{अ}+\text{कर}^{२}}{\text{र}^{२}}} = -\frac{(\text{अ}+\text{क})\text{र}^{२}\ \text{तार}}{\text{अ}+\text{कर}^{२}}$$

$$\therefore \int \frac{\text{ताय}(\text{अ}+\text{क})}{\text{अ य}^{४}+\text{कय}^{२}} = -(\text{अ}+\text{क})\int \frac{\text{र}^{२}\text{तार}}{\text{अ}+\text{क.र}^{२}} = -\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{क}}\int \frac{\text{र}^{२}\ \text{तार}}{\frac{\text{अ}}{\text{क}}+\text{र}^{२}}$$

$$= -\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{क}}\int\left(\text{ता र} - \frac{\frac{\text{अ}}{\text{क}}\text{तार}}{\frac{\text{अ}}{\text{क}}+\text{र}^{२}}\right) = -\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{क}}\left(\int \text{तार} - \frac{\text{अ}}{\text{क}}\int\frac{\text{तार}}{\frac{\text{अ}}{\text{क}}+\text{र}^{२}}\right)$$

$$= -\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{क}}\left\{\text{र} - \frac{\text{अ}}{\text{क}}\sqrt{\frac{\text{क}}{\text{अ}}}\text{स्प}^{-१}\left(\frac{\text{र}\sqrt{\text{क}}}{\sqrt{\text{अ}}}\right)\right\} = -\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{क}}\left(\text{र} - \sqrt{\frac{\text{अ}}{\text{क}}}\text{स्प}^{-१}\text{र}\sqrt{\frac{\text{क}}{\text{अ}}}\right)$$

$$= -\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{क}}\left(\frac{१}{\text{य}} - \sqrt{\frac{\text{अ}}{\text{क}}}\text{स्प}^{-१}\ \frac{\sqrt{\text{क}}}{\text{य}\sqrt{\text{अ}}}\right)$$

अभ्यास के लिये और प्रश्न ।

(१) $\displaystyle\int \frac{\text{ज्यायताय}}{\text{कोज्याय}}$, उ० लाछेय ।

(२) $\displaystyle\int \frac{\text{ताय}}{\text{अय}+\text{क}\sqrt{\text{य}}}$ .. .. उ० $\dfrac{२}{\text{अ}}\text{ला}\left(\text{अ}\sqrt{\text{य}}+\text{क}\right)$

(३) $\displaystyle\int \text{ताय}\left(\sqrt{\text{य}}+\sqrt[३]{\text{य}}\right)$ .. .. उ० $\dfrac{२\,\text{य}^{\frac{३}{२}}}{३} + \dfrac{३}{४}\text{य}^{\frac{४}{३}}$

(४) $\displaystyle\int \text{ताय}(\text{य}^{-३}+\text{य}^{-१}+\text{अ})$ .. उ० $\dfrac{२\text{अ य}^{३}+२\text{य}^{२}\text{ला य}-१}{२\text{य}^{२}}$

(५) $\int \frac{\text{ताय}}{\text{अ}^2 - \text{य}^2}$ .. उ०, $\frac{१}{\text{२अ}} \text{ला} \frac{\text{अ} + \text{य}}{\text{अ} - \text{य}}$,

(६) $\int \frac{\text{ताय.क}}{\text{यलाय}}$ .. .. उ०, क. ला (लाय)

(७) $\int$ कोस्पयताय .. उ० लाज्याय

(८) $\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{४ - \text{य}^2}}$ .. . उ० $\text{ज्या}^{-१} \frac{\text{य}}{२}$

(९) $\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{८ - \text{२य} - \text{य}^2}}$ .. .. उ० $\text{ज्या}^{-१} \frac{१ + \text{य}}{२}$

(१०) $\int \frac{\text{ताय}}{१० + \text{२य} + \text{य}^2}$ .. .. उ०, $\frac{१}{३} \text{स्प}^{-१} \frac{\text{य} + १}{३}$

(११) $\int \frac{\text{ताय य}^७}{\text{य}^2 + ४}$ .. उ०, $\frac{\text{य}^६}{६} - \text{य}^४ + \text{८य}^2 - \text{३२ला} (\text{य}^2 + ४)$

(१२) $\int \frac{\text{५ ताय}}{\text{४य}^४ + \text{य}^2}$ .. उ० $५(\text{२स्प}^{-१} \frac{१}{\text{२ य}} - \frac{१}{\text{य}})$

(१३) $\int \frac{\text{ताय}}{\text{अ} + \text{क य}}$ .. उ० $\text{ला} (\text{क}\sqrt{\text{अ} + \text{क य}})$

(१४) $\int \frac{(\text{१०य}^९ + \text{९य}^८)\text{ता य}}{(\text{य}^{१०} + \text{य}^९)^{\frac{४}{७}}}$ उ० $\frac{७}{३}(\text{य}^{१०} + \text{य}^९)^{\frac{३}{७}}$

(१५) $\int \frac{\left\{\frac{\text{न.य}^{\text{न}-१} + (\text{न} - १)\text{य}^{\text{न}-२}}{\text{न}}\right\}\text{ताय}}{(\text{य}^{\text{न}} + \text{य}^{\text{न}-१})^{\frac{\text{अ}}{\text{क}}}}$ उ० $\frac{\text{क}(\text{य}^{\text{न}} + \text{य}^{\text{न}-१})^{\frac{\text{क}-\text{अ}}{\text{क}}}}{\text{न} (\text{क} - \text{अ})}$

(१६) $\int \frac{(\sqrt{\text{य}^2 + ९} + \text{य})^2\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}^2 + ९}}$, उ० $\frac{१}{२}\left(\text{य} + \sqrt{\text{य}^2 + ९}\right)^2$

(१७) $\int \frac{\text{२य ताय}}{(\text{य}^2 + १)^2}$ .. उ०, $-\frac{१}{\text{य}^2 + १}$

(१८) $\int \frac{\text{क.य}^५\text{ता य}}{\text{य}^2 + १}$ .. उ०, $\text{क}\left(\frac{\text{य}^४}{४} - \frac{\text{य}^2}{२} + \text{ल}\sqrt{\text{य}^2 + १}\right)$

(१९) $\int (\text{अ} + \text{य}^2) (\text{अ} + \text{य}) \text{ ताय}$ .. उ०, $\text{अ}^2\text{य} + \frac{\text{अ.य}^2}{२} + \frac{\text{अ.य}^३}{३} + \frac{\text{य}^४}{४}$

(२०) $\int(अ^{२}+य^{२})(अ+य)य\ ताय$, . उ०, $\frac{अ^{३}य^{२}}{२}+\frac{अ^{२}.य^{३}}{३}+\frac{अ\,य^{४}}{४}+\frac{य^{५}}{५}$

(२१) $\int\frac{(१+य)^{२}(१—य)ता\,य}{य^{२}}$, .. उ०, $लाय—य—\frac{य}{२}—\frac{१}{य}$।

(२२) $\int\frac{य^{२}\sqrt{य}\ ताय}{१+य}$, उ०, $\frac{२}{५}य^{\frac{५}{२}}—\frac{२}{३}य^{\frac{३}{२}}+२य^{\frac{१}{२}}—२\ स्प^{-१}\ य^{\frac{१}{२}}$,

(२३) $\int(अ+क\ य^{न})^{म}न\ क.य^{न-१}ताय$, उ०, $\frac{(अ+क\ य^{न})^{म+१}}{म+१}$,

उदाहरण

(२४) एक चोर अ स्थान से एक हीरे को चुरा कर भागा। जब अ स्थान से पौन मील दूर जा चुका तब उस को पकड़ने के लिये एक सिपाही अ स्थान से दौड़ा इस सिपाही के प्रतिक्षण की गति चोर की गति से अ स्थान से चोर की दूरी जो हो उतनी गुणित है तो बतावो कि अ स्थान से कितनी दूर पर चोर पकड़ा गया ?। उत्तर, $२\frac{१}{४}$ मील।

(२५) एक हीरे के मोल की बाढ़ एक राजा के आमदनी की बाढ़ से आमदनी के वर्ग को गुणने से जो हो सो होती है तो बताओ कि जब राजा की आमदनी तीन लाख हो तो हीरे का क्या मोल होगा ?

उत्तर, ९×१०^{१५} हीरे का मोल।

९। कल्पना करो कि $\int\frac{ताय}{फ(य)}=ला\{फ(य)+र\}$ जहाँ र, य का कोई फल है तो तात्कालिक गति बनाने से

$$\frac{ताय}{फ(य)}=\frac{फ'(य)ताय+तार}{फ(य)+र}\ \therefore\ फ(य)ताय+ताय.र$$

$=फ'(य)ताय\ फ(य)+तारफ(य)$, पक्षान्तरानयन से और परस्पर भाग देने से

$$\frac{ताय-तार}{फ(य)\ फ(य)-र}=\frac{ताय}{फ(य)}$$ यहाँ यदि $फ'(य)फ(य)=य$, तो

$$\frac{ताय-तार}{य-र}=\frac{ताय}{फ(य)}\ \therefore\int\frac{ताय-तार}{य-र}=\int\frac{ताय}{फ(य)}$$

$$\therefore\ ला(य-र)=ला\{फ(य)+र\}\ \therefore\ य—र=फ(य)+र$$

तब $र=\frac{य-फ(य)}{२}$ और $फ(य)+र=\frac{य+फ(य)}{२}$

इस लिये $\int \frac{\text{ताय}}{\text{फ(य)}} = \text{ला}\left(\frac{\text{य} + \text{फ(य)}}{२}\right) = \text{ला}\{\text{य} + \text{फ(य)}\} - \text{ला}_२$

स्थिराङ्क को छोड़ देने से $\int \frac{\text{ताय}}{\text{फ(य)}} = \text{ला}\{\text{य} + \text{फ(य)}\}$

जैसे (१) उदाहरण, $\int \frac{\text{ताय}}{\text{य}}$ यहाँ $\text{फ(य)} = \text{य}$, और $\text{फ}'\text{(य)} = १$

$\therefore$ $\text{फ(य)}\ \text{फ}'\text{(य)} = \text{य}$, इस लिये $\int \frac{\text{ताय}}{\text{य}} = \text{ला}\{\text{य} + \text{फ(य)}\} = \text{ला}\ २\ \text{य}$

$= \text{लाय} + \text{ला}\ २$ स्थिराङ्क को निकास लेने से $\int \frac{\text{ताय}}{\text{य}} = \text{लाय}$।

ऐसा ही पहले भी सिद्ध है।

(२) उदाहरण, $\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}^२ \pm \text{अ}^२}}$ यहाँ $\text{फ(य)} = \sqrt{\text{य}^२ \pm \text{अ}^२}$

इस लिये $\text{फ}'\text{(य)} = \frac{\text{य}}{\sqrt{\text{य}^२ \pm \text{अ}^२}}$ और $\text{फ(य)}\ \text{फ}'\text{(य)} = \text{य}$, इस लिये

ऊपर की युक्ति से $\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}^२ \pm \text{अ}^२}} = \text{ला}\left(\text{य} + \sqrt{\text{य}^२ \pm \text{अ}^२}\right)$ यही पहले भी सिद्ध हुआ है।

(३) उदाहरण, $\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{(\text{य}^२ \pm २\text{अय}}} = \int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{(\text{य} \pm \text{अ})^२ - \text{अ}^२}} = \int \frac{\text{तार}}{\sqrt{\text{र}^२ - \text{अ}^२}}$

यदि $\text{र} = \text{य} \pm \text{अ}$,

तब दूसरे उदाहरण से $\int \frac{\text{तार}}{\sqrt{\text{र}^२ - \text{अ}^२}} = \int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}^२ \pm २\ \text{अय}}}$

$= \text{ला}(\text{र} + \sqrt{\text{र}^२ - \text{अ}^२}) = \text{ला}\ (\text{य} \pm \text{अ} + \sqrt{\text{य}^२ \pm २\ \text{अय}})$

(२) उदाहरण की सिद्धि के लिये टाड्हण्टर (Todhunter) और विलिअमसन् (Williamson) साहब ने $\sqrt{\text{य}^२ \pm \text{अ}^२} = \text{ल} - \text{य}$, यह कल्पना किया।

हाइमर्स (Hymers) ने $\sqrt{\text{य}^२ \pm \text{अ}^२} = \frac{(\sqrt{\text{य}^२ \pm \text{अ}^२})\ (\text{य} + \sqrt{\text{य}^२ \pm \text{अ}^२})}{\text{य} + \sqrt{\text{य}^२ \pm \text{अ}^२}}$

ऐसा कर तब चलराशि सिद्ध किया, डिमार्गन (Demorgan) ने

पहले $\sqrt{\text{य}^२ \pm \text{अ}^२} = \text{र}$ तब $\text{य}^२ \pm \text{अ}^२ = \text{र}^२$ $\therefore$ $२\text{यताय} = २\text{रतार}$ और

वा, $\text{यताय} = \text{रतार}$ इस लिये $\text{य.ताय} + \text{र}\cdot\text{ताय} = \text{रतार} + \text{रताय}$

$\therefore$ $\text{ताय} = \frac{\text{र(ताय + तार)}}{\text{य + र}}$ इस का उत्थापन देने से

$$\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2}} = \int \frac{\text{र(ताय + तार)}}{\text{र(य + र)}} = \int \frac{\text{ताय + तार}}{\text{य + र}} = \text{ला (य + र)}$$

$= \text{ला}\left(\text{य} + \sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2}\right)$ ऐसा सिद्ध किया,

डिमार्गन साहब ने असंभव संख्या का भी उत्थापन देकर चलराशि ले आने के लिये एक दूसरी रीति लिखी है परन्तु ये सब कल्पनायें शीघ्र मन में नहीं आ सकतीं जब तक कि पहले से यह ज्ञान न हो कि

$\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2}} = \text{ला}\left(\text{य} + \sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2}\right)$ ऐसा होता है इस लिये हमारी समझ में इस प्रक्रम के आदि में हमने जो सिद्धान्त लिखा है उस से बहुत ही सहज में चलराशि सिद्ध हो जाता है।

१०। चलनकलन से सिद्ध है कि $\text{ता (च + ज)} = \text{ताच}\cdot\text{ज} + \text{च}\cdot\text{ताज}$

$\therefore \int \text{ता (च} \times \text{ज)} = \int \text{ताच}\cdot\text{ज} + \int \text{च ताज}$

$\therefore \int \text{ताचज} = \text{च}\cdot\text{ज} - \int \text{च}\cdot\text{ताज}$ इसे खण्डचलानयन कहते हैं इस पर से अनेक उदाहरण की सिद्धि बड़े लाघव से हो जाती है जैसे।

(१) उदाहरण, $\int \text{ज्या}^{-1}\text{य ताय}$ यहां यदि $\text{ताय} = \text{ताच}$ और $\text{ज्या}^{-1}\text{य} = \text{ज}$ तो $\text{च} = \text{य}$, और $\text{ताज} = \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{१} - \text{य}^2}}$,

इस लिये $\int \text{ज्या}^{-1}\text{य ताय} = \text{च} \cdot \text{ज} - \int \text{च} \cdot \text{ताज}$

$$= \text{य} \cdot \text{ज्या}^{-1}\text{य} - \int \frac{\text{यताय}}{\sqrt{\text{१} - \text{य}^2}} = \text{य} \cdot \text{ज्या}^{-1}\text{य} + \sqrt{\text{१} - \text{य}^2}$$

(२) उदाहरण, $\int \text{ताय}\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2}$ यहां $\text{ताय} = \text{ताच} \therefore \text{य} = \text{च}$

और $\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2} = \text{ज} \therefore \frac{\text{य}\cdot\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2}} = \text{ताज}$,

इस लिये, $\int \text{ताय}\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2} = \text{य}\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2} - \int \frac{\text{य}^2\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2}}$

$$= \text{य}\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2} - \int \frac{\text{ताय (य}^2 \pm \text{अ}^2 \mp \text{अ}^2)}{\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2}}$$

$$= य\sqrt{य^2 \pm अ^2} - \int ताय\sqrt{य^2 \pm अ^2} \pm अ^2 \int \frac{ताय}{\sqrt{य^2 \pm अ^2}}$$

पक्षान्तरानयन से और ६ प्रक्रम से

$$२\int ताय\sqrt{य^2 \pm अ^2} = य\sqrt{य^2 \pm अ^2} \pm अ^2 ला\ (य + \sqrt{य^2 \pm अ^2})$$

$$\therefore \int ताय\sqrt{य^2 \pm अ^2} = \frac{य}{२}\sqrt{य^2 \pm अ^2} \pm \frac{अ^2}{२} ला\ (य + \sqrt{य^2 \pm अ^2})।$$

(३) उदाहरण, $\int$ यकोज्याअय·ताय यहां ताच = कोज्याअय·ताय

$$\therefore च = \frac{ज्याअय}{अ} \text{ और } ज = य \quad ताज = ताय$$

इस लिये, $\int$ यकोज्याअय·ताय $= \frac{य \cdot ज्याअय}{अ} - \int \frac{ज्याअय \cdot ताय}{अ}$

$$= \frac{यज्याअय}{अ} + \frac{कोज्याअय}{अ^2}$$

यदि $\int$ $य^2$कोज्याअयताय तो पूर्व युक्ति से

$$\int य^2 कोज्याअयताय = \frac{य^2 \cdot ज्याअय}{अ} - \frac{२}{अ}\int यज्याअयताय$$

$$= \frac{य^2 \cdot ज्याअय}{अ} + \frac{२}{अ}\left(\frac{यकोज्याअय}{अ} - \frac{ज्याअय}{अ^2}\right)$$

$$= \frac{य^2 ज्याअय}{अ} = \frac{२यकोज्याअय}{अ^2} + \frac{ज्याअय}{अ^3}$$

(४) उदाहरण, $\int य^न$कोज्याअयताय यहाँ भी ताच = कोज्याअयताय और ज = $य^न$ मानने से

$$\int य^न कोज्याअयताय = \frac{य^न ज्या\ अय}{अ} - \frac{१}{अ}\int न \cdot य^{न-१} ज्याअयताय$$

$$= \frac{य^न \cdot ज्याअय}{अ} - \frac{न}{अ}\int य^{न-१}\ ज्याअयताय$$

फिर $\int$ $य^{न-१}$ज्याअयताय

$$= -\frac{य^{न-१} कोज्याअय}{अ} + \int (न-१) य^{न-२} कोज्याअय$$

$$= -\frac{य^{न-१} कोज्याअय}{अ} + \frac{न-१}{अ}\int य^{न-२} कोज्याअय$$

यों बार बार क्रिया करने से $\int$ य^{न}कोज्याअयताय इस का मान आजायगा।

(५) $\int$ इ^{कय}ज्याअयताय $= \int \left\{ \frac{\text{ज्याअय}}{\text{क}} \cdot \text{ता}\,(\text{इ}^{\text{कय}}) \right\}$

$= \frac{\text{ज्याअय}}{\text{क}}\text{इ}^{\text{कय}} - \int \frac{\text{अ}\cdot\text{कोज्याअय}}{\text{क}}\text{इ}^{\text{कय}}\text{ताय}$

$= \frac{\text{ज्याअय}}{\text{क}}\text{इ}^{\text{कय}} - \int \left\{ \frac{\text{अ}\cdot\text{कोज्याअय}}{\text{क}^{२}}\text{ता}\,(\text{इ}^{\text{कय}}) \right\}$

$= \frac{\text{ज्याअय}}{\text{क}}\text{इ}^{\text{कय}} - \frac{\text{अकोज्याअय}}{\text{क}^{२}}\text{इ}^{\text{कय}} - \int \frac{\text{अ}^{२}\cdot\text{ज्याअय}}{\text{क}^{२}}\text{इ}^{\text{कय}}\text{ताय}$

पक्षान्तरानयन से

$\int \text{इ}^{\text{कय}}\text{ज्याअयताय} + \frac{\text{अ}^{२}}{\text{क}^{२}}\int \text{इ}^{\text{कय}}\text{ज्याअयताय}$

$= \frac{\text{अ}^{२}+\text{क}^{२}}{\text{क}^{२}}\int \text{इ}^{\text{कय}}\text{ज्याअयताय} = \frac{\text{इ}^{\text{कय}}}{\text{क}}\left(\text{ज्याअय} - \frac{\text{अ}\cdot\text{कोज्याअय}}{\text{क}} \right)$

$\therefore \int \text{इ}^{\text{कय}}\text{ज्याअय ताय} = \frac{\text{इ}^{\text{कय}}(\text{क ज्याअय} - \text{अकोज्याअय})}{\text{अ}^{२}+\text{क}^{२}}$,

११। यह चलनकलन से सिद्ध है कि ता $\left(\frac{\text{च}}{\text{ज}}\right) = \frac{\text{ज}\cdot\text{ताच} - \text{चताज}}{\text{ज}^{२}}$

(जहां च, और ज दोनों य स्वतन्त्रराशि के फल हैं)

इस लिये $\int \text{ता}\left(\frac{\text{च}}{\text{ज}}\right) = \int \frac{\text{जताच} - \text{चताज}}{\text{ज}^{२}} = \int \frac{\text{ताच}}{\text{ज}} - \int \frac{\text{च}\cdot\text{ताज}}{\text{ज}^{२}}$

$= \int \frac{\text{ताच}}{\text{ज}} + \int \text{च}\cdot\text{ता}\left(\frac{१}{\text{ज}}\right)$

$\therefore \frac{\text{च}}{\text{ज}} - \int \frac{\text{ताच}}{\text{ज}} = \int \text{च}\cdot\text{ता}\left(\frac{१}{\text{ज}}\right)$ यह भी एक दूसरे प्रकार का खण्ड-चलानयन है। इसको $\int \frac{\text{ताच}}{\text{ज}} = \frac{\text{च}}{\text{ज}} + \int \frac{\text{च}\cdot\text{ताज}}{\text{ज}^{२}}$ ऐसे भी लिख सकते हो।

१२। स्वतन्त्रराशि का चाहे जैसा फल हो परन्तु चलनकलन से उसका तात्कालिक सम्बन्ध जान सकते हो परन्तु यदि तात्कालिक सम्बन्ध ज्ञात हो तो चलराशिकलन से साक्षात् उसी तात्कालिक सम्बन्ध से प्रायः फल का ज्ञान नहीं होता जैसे $\frac{१}{\sqrt{\text{य}^{२} \pm २\text{अय}}}$ इस तात्कालिक सम्बन्ध में जब तक एक

दूसरा स्वतन्त्रराशि $\text{र}_1 = \text{य} \pm \text{अ}$ ऐसा न मानोगे तब तक चलसंख्या का जानना कठिन है। एक स्वतन्त्रराशि के स्थान में क्या जोड़ घटा वा किससे गुण भाग कर दूसरी स्वतन्त्रराशि कल्पना करें जिसमें तात्कालिक सम्बन्ध वा तात्कालिकी गति पर से सहज में चलसंख्या सिद्ध हो जाय इस के लिये अनेक उदाहरणों के क्रियाओं का जानना और अभ्यास करना इनको छोड़ और कोई उपाय नहीं है। इस लिये विद्यार्थियों को अभ्यास करने के लिये हम यहाँ पर कुछ उदाहरणों को क्रिया समेत दिखाते हैं॥

उदाहरणों के करने के पहले खण्डचलायन की क्रिया समझने के लिये नीचे लिखे हुए श्लोक वा दोहे को अभ्यास कर रक्खो।

श्लोक।

इष्टाप्तभुक्तिं परिकल्प्य भुक्तिं
तज्जं चलं चैकमथाहतिर्या।
एकेष्टयोरिष्टजवाहतैक—
गतेश्चलोना स्वगतेश्चलः स्यात् ॥ १२ ॥

दोहा

इष्टभक्त गति मानि गति जो चल सो है एक।
एक इष्ट को घात करि राखहु धारि विवेक॥
इष्टभुक्ति हत एक को मानि भुक्ति चल लाय।
तामें याको हीन करि गतिचल कहो वनाय॥ १२ ॥

उदाहरण।

(१) $\int \text{य}\sqrt{\text{य}+\text{अ}}\ \text{ताय} = \int (\text{य}+\text{अ}-\text{अ})\sqrt{\text{य}+\text{अ}}\ \text{ताय}$

$= \int (\text{य}+\text{अ})\ (\text{य}+\text{अ})^{\frac{1}{2}}\text{ताय} - \int \text{अ}\sqrt{\text{य}+\text{अ}}\ \text{ताय}$

$= \int (\text{य}+\text{अ})^{\frac{3}{2}}\text{ताय} - \text{अ} \int \text{ताय}\ (\text{य}+\text{अ})^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{2}{5}(\text{य}+\text{अ})^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}\text{अ}\ (\text{य}+\text{अ})^{\frac{3}{2}}$।

२) $\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}+\text{अ}}+\sqrt{\text{य}+\text{क}}} = \int \frac{\text{ताय}\sqrt{\text{य}+\text{अ}} - \text{ताय}\sqrt{\text{य}+\text{क}}}{\text{अ}-\text{क}}$

$= \frac{2\{(\text{य}+\text{अ})^{\frac{3}{2}} - (\text{य}+\text{क})^{\frac{3}{2}}\}}{3(\text{अ}-\text{क})}$ } दोनों उदाहरणों में $\text{र} = \text{य} + \text{अ}$ कल्पना करने से भी चलराशिसिद्ध हुए हैं

$$(३)\int\frac{य\cdot ताय}{य^८—अ^८}=\frac{१}{२अ^४}\int\left(\frac{यताय}{य^४—अ^४}—\frac{यताय}{य^४+अ^४}\right)$$

$$=\frac{१}{२अ^४}\int\left\{\frac{१}{४अ^२}\left(\frac{२\ ताय\cdot य}{य^२—अ^२}—\frac{२\ तायय}{य^२+अ^२}\right)—\frac{यताय}{य^४+अ^४}\right\}$$

$$=\frac{१}{८अ^६}ला\frac{य^२—अ^२}{य^२+अ^२}—\frac{१}{२अ^४}\int\frac{य\cdot ताय}{य^४+अ^४}$$

$$=\frac{१}{८अ^६}ला\frac{य^२—अ^२}{य^२+अ^२}—\frac{१}{४अ^४}\int\frac{२\ यताय}{य^४+अ^४}$$

$$=\frac{१}{८अ^६}ला\frac{य^२—अ^२}{य^२+अ^२}—\frac{१}{४अ^६}स्प^{-१}\frac{य^२}{अ^२},$$

$$(४)\quad\int(अ+कय^न)^{\frac{प}{ब}}य^{म-१}\ ताय=\int य^{न-१}(अ+कय^न)^{\frac{प}{ब}}य^{म-न}ताय$$

$$=\int य^{न-१}(अ+कय^न)^{\frac{प}{ब}}(य^न)^{\frac{म}{न}-१}ताय$$

$$=\int क^{१-\frac{म}{न}}क^{\frac{म}{न}-१}य^{न-१}(अ+कय^न)^{\frac{प}{ब}}(य^न)^{\frac{म}{न}-१}ताय$$

$$=क^{१-\frac{म}{न}}\int य^{न-१}(अ+कय^न)^{\frac{प}{ब}}क^{\frac{म}{न}-१}(य^न)^{\frac{म}{न}-१}ताय$$

$$=क^{१-\frac{म}{न}}\int य^{न-१}(अ+कय^न)^{\frac{प}{ब}}(कय^न)^{\frac{म}{न}-१}ताय$$

$=क^{१-\frac{म}{न}}\int य^{न-१}(अ+कय^न)^{\frac{प}{ब}}(अ+कय^न—अ)^{\frac{म}{न}-१}ताय$ । अब यहां मानो कि $र=अ+कय^न$ $\therefore$ $तार=न\cdot कय^{न-१}ताय$ और

$$ताय=\frac{तार}{नक\cdot य^{न-१}}$$

इस लिये $क^{१-\frac{म}{न}}\int य^{न-१}(अ+कय^न)^{\frac{प}{ब}}(अ+कय^न—अ)^{\frac{म}{न}-१}ताय$

$$=क^{१-\frac{म}{न}}\int य^{न-१}(अ+कय^न)^{\frac{प}{ब}}(अ+कय^न—अ)^{\frac{म}{न}-१}\frac{तार}{नकय^{न-१}}$$

$=\frac{क^{१-\frac{म}{न}}}{नक}\int र^{\frac{प}{ब}}(र—अ)^{\frac{म}{न}-१}तार$ । अब यहां यदि $\frac{म}{न}$ यह अभिन्न और धन हो तो द्वियुक्पदसिद्धान्त से $(र—अ)^{\frac{म}{न}-१}$ इस का मान फैला कर उसे $र^{\frac{प}{ब}}तार$ इस से गुण फिर सहज में चलराशि जान सकते हो

जैसे $\int य^{२}\sqrt{अ+य}$ ताय यहां $न=१, \frac{प}{ब}=\frac{१}{२}, क=१$, और $म—१=२$

$\therefore \frac{म}{न}=\frac{३}{१}=३$, और $र=अ+य$, तब

$$\frac{क^{१-\frac{म}{न}}}{नक}\int र^{\frac{प}{ब}}(र—अ)^{\frac{म}{न}-१}तार=\frac{१^{-२}}{१\times १}\int र^{\frac{१}{२}}(र—अ)^{२}तार$$

$$=\int र^{\frac{१}{२}}(र^{२}—२रअ+अ^{२})तार=\int र^{\frac{५}{२}}तार—२अ\int र^{\frac{३}{२}}तार+अ^{२}\int र^{\frac{१}{२}}तार$$

$$=\frac{२}{७}र^{\frac{७}{२}}—\frac{४}{५}अ\cdot र^{\frac{५}{२}}+\frac{२}{३}अ^{२}र^{\frac{३}{२}}$$

$$=\frac{२}{७}(अ+य)^{\frac{७}{२}}—\frac{४}{५}अ\,(अ+य)^{\frac{५}{२}}+\frac{२}{३}अ^{२}(अ+य)^{\frac{३}{२}}।$$

और $\int य^{३}(अ+कय^{२})^{\frac{२}{३}}$ ताय। यहां $न=२,\ म—१=३,\ \frac{प}{व}=\frac{२}{३}$

$\therefore \frac{म}{न}=२,\ र=अ+कय^{२}$

इस लिये, $\frac{क^{१-\frac{म}{न}}}{कन}\int र^{\frac{प}{व}}(र—अ)^{\frac{म}{न}-१}तार=\frac{१}{२क^{२}}\int र^{\frac{२}{३}}(र—अ)^{१}तार$

$$=\frac{१}{२क^{२}}\left(\frac{३}{८}र^{\frac{८}{३}}—\frac{३}{५}अर^{\frac{५}{३}}\right)=\frac{३}{१६क^{२}}(अ+कय^{२})^{\frac{८}{३}}—\frac{३अ}{१०क^{२}}(अ+कय^{२})^{\frac{५}{३}}।$$

अथवा, $\int (अ+कय^{न})^{\frac{प}{ब}}य^{म-१}\times ताय$

$$=\int (अय^{-न}+क)^{\frac{प}{व}}य^{\frac{नप}{व}+म-१}\times ताय$$

$$=\int य^{-न-१}(अय^{-न}+क)^{\frac{प}{व}}य^{\frac{नप}{व}+म+न}\times ताय$$

$$=\int अ^{\frac{म}{न}+\frac{प}{व}+१}\times य^{-न-१}(अय^{-न}+क)^{\frac{प}{व}}(अय^{-न}+क—क)^{-\left(\frac{म}{न}+\frac{प}{व}+१\right)}\times ताय$$

यहां भी यदि $र=अय^{-न}+क$ तो $तार=—अनय^{-न-१}\times ताय$

$$\therefore ताय=—\frac{तार}{अनय^{-न-१}}$$

इस लिये

$$\int अ^{\frac{म}{न}+\frac{प}{व}+१}\times य^{-न-१}(अय^{-न}+क-क)^{-\left(\frac{म}{न}+\frac{प}{ब}+१\right)}\times ताय(अय^{-न}+क)^{\frac{प}{व}}$$

$$= -\frac{अ^{\frac{म}{न}+\frac{प}{ब}+१}}{अन}\int र^{\frac{प}{ब}}(र-क)^{-(\frac{म}{न}+\frac{प}{ब}+१)}\times तार$$ । यहां यदि

$\frac{म}{न}+\frac{प}{ब}$ यह ऋणात्मक अभिन्न संख्या हो तो द्वियुक्पद से चलराशि जान सकते हो

जैसे $\int\frac{ताय}{य^{२}\sqrt{अ+य^{२}}} = \int य^{-२}(अ+य^{२})^{-\frac{१}{२}}ताय$

यहाँ $म-१=-२ \therefore म=-१,\ न=२,$ और $\frac{प}{ब}=-\frac{१}{२}$

$\therefore \frac{म}{न}+\frac{प}{ब} = -\frac{१}{२}-\frac{१}{२} = -१$ और $क=१,$

इस लिये $-\frac{अ^{\frac{म}{न}+\frac{प}{ब}+१}}{अन}\int र^{\frac{प}{ब}}(र-क)^{-(\frac{म}{न}+\frac{प}{ब}+१)}\times तार$

$= -\frac{अ^{०}}{२अ}\int र^{-\frac{१}{२}}(र-क)^{०}\times तार = -\frac{१}{२अ}\int र^{-\frac{१}{२}}तार$

$= \frac{१}{अ}\cdot र^{\frac{१}{२}}$ यहाँ $र = अय^{-२}+१,$

और $\int\frac{ताय}{(अ^{२}+य^{२})^{\frac{३}{२}}} = \int य^{०}(अ^{२}+य^{२})^{-\frac{३}{२}}ताय$

यहाँ $म-१=०\ \therefore म=१, \frac{प}{ब}=-\frac{३}{२}$

$न=२,\ \frac{म}{न}+\frac{प}{ब} = \frac{१}{२}-\frac{३}{२} = -१$ और $अ^{२}=अ,\ र=(अ^{२}य^{-२}+१)$

इस लिये $-\frac{अ^{\frac{म}{न}+\frac{प}{ब}+१}}{अन}\int र^{\frac{प}{ब}}(र-क)^{-(\frac{म}{न}+\frac{प}{ब}+१)}\times तार$

$= -\frac{१}{२अ^{२}}\int र^{-\frac{३}{२}}(र-क)^{०}तार$

$= -\frac{१}{२अ^{२}}\int र^{-\frac{३}{२}}तार = -\frac{१}{२अ^{२}}\times -\frac{२}{१}र^{-\frac{१}{२}} = \frac{१}{अ^{२}\sqrt{र}}$

$= \frac{१}{अ^{२}\sqrt{अ^{२}य^{-२}+१}} = \frac{य}{अ^{२}\sqrt{अ^{२}+य^{२}}}$ ।

(५) $\int \frac{य^म ताय}{(अ+कय)^न} = \frac{१}{क^म} \int \frac{(अ+कय—अ)^म}{(अ+कय)^न} ताय$

$= \frac{१}{क^म} \int \frac{(र-अ)^म}{र^न} \frac{तार}{क}$, यदि $र = अ + कय$,

$$= \frac{१}{क^{म+१}} \int \frac{र^म — मअ \cdot र^{म-१} + अ^२ \cdot \frac{म(म—१)}{\lfloor २} र^{म-२} — \ldots}{र^न} \cdot तार$$

$$= \frac{१}{क^{म+१}} \int \left(र^{म-न} - मअर^{म-न-१} + अ^२ \cdot \frac{म(म—१)}{\lfloor २} र^{म-न-२} — \ldots\right) तार$$

$$= \frac{१}{क^{म+१}} \left\{ \frac{र^{म-न+१}}{म-न+१} — \frac{मअ}{म—न} र^{म-न} + अ^२ \frac{म(म—१)}{\lfloor २} \cdot \frac{र^{म-न-१}}{म—न—१} — \ldots \right\} ।$$

(६) $\int \frac{ताय}{अ + कय + गय^२} = \int \frac{४ग \cdot ताय}{४अग + ४कगय + ४ग^२य^२}$

$= \int \frac{४गताय}{(२गय + क)^२ + ४अग — क^२}$

$= \int \frac{४गताय}{र^२ + ४अग — क^२} = \int \frac{२तार}{र^२ + ४अग—क^२}$ (यदि $२गय + क = र$)

$$\frac{२}{\sqrt{४अग—क^२}} स्प^{-१} \frac{र}{\sqrt{४अग—क^२}}$$

यदि $४अग > क^२$ और अ, क, ग सब धन हों

वा, $\int \frac{२तार}{र^२ + ४अग—क^२} = २ \int \frac{१}{२ख} \left(\frac{तार}{र—ख} — \frac{तार}{र+ख} \right)$

$= \frac{१}{ख} ला \frac{र—ख}{र+ख}$

(यदि $ख = \sqrt{क^२ — ४अग}$ और $४ अग \angle क^२$)

$\therefore \frac{१}{ख} ला \frac{र—ख}{र+ख} = \frac{१}{\sqrt{क^२—४अग}} ला \frac{२गय + क — \sqrt{क^२—४अग}}{२गय + क + \sqrt{क^२—४अग}}$

(७) $\int \frac{ताय}{(य+अ)(य+क)} = \int \frac{१}{अ—क} \left(\frac{ताय}{य+क} — \frac{ताय}{य+अ} \right)$

$= \frac{१}{अ—क} \int \left(\frac{ताय}{य+क} — \frac{ताय}{य+अ} \right) = \frac{१}{अ—क} ला \frac{य+क}{य+अ}$ ।

(८) $\frac{(त+नय)ताय}{अ+कय+गय^२} = \frac{१}{२ग} \int \frac{\{ २तग + न(क + २गय — क) \} ताय}{अ + कय + गय^२}$

$$= \frac{१}{२ग}\left\{ \int \frac{न(क+२गय)ताय}{अ+कय+गय^२} + \int \frac{(२ तग—नक)ताय}{अ+कय+गय^२} \right\}$$

$$= \frac{न}{२ग} ला\,(अ+कय+गय^२) + \left(\frac{२तग—नक}{२ग}\right)\int \frac{ताय}{अ+कय+गय^२}$$

दूसरे खण्ड का चल ६वें उदाहरण से स्पष्ट है।

(९) $\int \frac{(अ+कय)ताय}{य^२—२अ_१य+अ_१^२+क_१^२} = \int \frac{\{अ+कअ_१+क(य—अ_१)\}ताय}{य^२—२अ_१य+अ_१^२+क_१^२}$

$$= \int \frac{(अ+कअ_१)ताय}{(य—अ_१)^२+क_१^२} + \int \frac{क(य—अ_१)ताय}{(य—अ_१)^२+क_१^२}$$

$$= \frac{अ+कअ_१}{क_१} स्प^{-१}\frac{य—अ_१}{क_१} + \frac{क}{२} ला\,\{(य—अ_१)^२+क_१^२\}$$

(१०) ९ वें उदाहरण में यदि, $अ=१, —क=अ_१=$ कोज्याइ, और $क_१=$ ज्याइ

तो $\int \frac{(१—कोज्याइ\cdot य)ताय}{१-२कोज्याइ\times य+य^२} = \frac{१—कोज्या^२इ}{ज्याइ} स्प^{-१}\frac{य—कोज्याइ}{ज्याइ}$

$— \frac{कोज्याइ}{२} ला\,\{(य—कोज्याइ)^२+ज्या^२इ\}$

$$= ज्याइ\ स्प^{-१}\frac{य—कोज्याइ}{ज्याइ} - \frac{कोज्याइ}{२} ला(य^२—२कोज्याइ\times य+१)।$$

(११) $\int \frac{(अ^२\pm य^२)^{\frac{१}{२}} ताय}{य^२} = \int \left(\frac{अ\ ताय}{य\sqrt{अ^२\pm य^२}} \pm \frac{य\ ताय}{य\sqrt{अ^२\pm य^२}}\right)$

$\int \pm ताय(अ^२\pm य^२)^{—\frac{१}{२}} + \int अ^२य^{-३}(अ^२य^{-२}\pm १)^{—\frac{१}{२}} ताय$

$= —\sqrt{अ^२य^{-२}+१} + ला(य+\sqrt{अ^२+य^२})$ यदि धन चिह्न हो।

$= —\sqrt{अ^२य^{-२}—१} —ज्या^{-१}\frac{य}{अ}$ यदि ऋण हो।

(१२) $\int \frac{अ^२ ताय}{य\sqrt{य^२\pm अ^२}} = \int अ^२य^{-२}(\pm अ^२य^{-२}+१)^{—\frac{१}{२}} ताय$

$= \int (अ^२य^{-२}+१—१)(अ^२य^{-२}+१)^{—\frac{१}{२}} ताय,$ + चिन्ह से

$= \int (अ^२य^{-२}+१)^{\frac{१}{२}} ताय — \int \frac{ताय}{\sqrt{अ^२य^{-२}+१}}$ अब यहां $(अ^२य^{-२}+१)^{\frac{१}{२}}$

और $\frac{१}{(अ^२य^{-२}+१)^{\frac{१}{२}}}$ का मान द्वियुक्पदसिद्धान्त से ले आकर एक श्रेढी

में चलराशि का मान जान सकते हो इसी प्रकार—चिन्ह से भी जान लो

(१३) $\int \frac{\text{ताय}}{\text{य}^2\sqrt{\text{अ}^2\text{य}^2+१}} = \int \frac{\text{ताय}\cdot\text{य}^{-2}}{\text{य}\sqrt{\text{अ}^2+\text{य}^{-2}}} = \int \frac{\text{ताय}\cdot\text{य}^{-3}}{\sqrt{\text{अ}^2+\text{य}^{-2}}}$

$= -\frac{१}{२}\int -२\,\text{ताय}\text{य}^{-3}(\text{अ}^2+\text{य}^{-2})^{-\frac{१}{२}} = -(\text{अ}^2+\text{य}^{-2})^{\frac{१}{२}}$ ।

(१४) $\int \frac{\text{ताय}}{\text{अ}+\text{क}\text{कोज्याय}} = \int \frac{\text{ताय}}{\text{अ}(\text{ज्या}^2\frac{\text{य}}{२}+\text{कोज्या}^2\frac{\text{य}}{२})+\text{क}(\text{कोज्या}^2\frac{\text{य}}{२}-\text{ज्या}^2\frac{\text{य}}{२})}$

$= \int \frac{\text{ताय}}{(\text{अ}+\text{क})\text{कोज्या}^2\frac{\text{य}}{२}+(\text{अ}-\text{क})\text{ज्या}^2\frac{\text{य}}{२}} = \int \frac{\text{ताय}\ \text{छे}^2\frac{\text{य}}{२}}{\text{अ}+\text{क}+(\text{अ}-\text{क})\text{स्प}^2\frac{\text{य}}{२}}$

$= २\int \frac{\text{ताल}}{\text{अ}+\text{क}+(\text{अ}-\text{क})\text{ल}^2}$, यदि $\text{ल} = \text{स्प}\frac{\text{य}}{२}$

इस लिये यदि अ>क तो

$२\int \frac{\text{ताल}}{\text{अ}+\text{क}+(\text{अ}-\text{क})\text{ल}^2} = \frac{२}{\text{अ}-\text{क}}\int \frac{\text{ताल}}{\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{अ}-\text{क}}+\text{ल}^2} = \frac{२}{\text{अ}-\text{क}}\int \frac{\text{ताल}}{\text{ग}^2+\text{ल}^2}$

यदि $\text{ग}^2 = \frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{अ}-\text{क}}$ तो ११ सूत्र से

$\frac{२}{\text{अ}-\text{क}}\int \frac{\text{ताल}}{\text{ग}^2+\text{ल}^2} = \frac{२}{\text{अ}-\text{क}}\cdot\frac{१}{\text{ग}}\text{स्प}^{-1}\frac{\text{ल}}{\text{ग}} = \frac{२}{\text{अ}-\text{क}}\cdot\frac{\sqrt{\text{अ}-\text{क}}}{\sqrt{\text{अ}+\text{क}}}\text{स्प}^{-1}\frac{\text{ल}}{\text{ग}}$

$= \frac{२}{\sqrt{\text{अ}^2-\text{क}^2}}\text{स्प}^{-1}\left(\sqrt{\frac{\text{अ}-\text{क}}{\text{अ}+\text{क}}}\text{स्प}\frac{१}{२}\text{य}\right)$

और यदि अ<क तो

$२\int \frac{\text{ताल}}{\text{अ}+\text{क}+(\text{अ}-\text{क})\text{ल}^2} = २\int \frac{\text{ताल}}{\text{अ}+\text{क}-(\text{क}-\text{अ})\text{ल}^2} = \frac{२}{\text{क}-\text{अ}}\int \frac{\text{ताल}}{\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{क}-\text{अ}}-\text{ल}^2}$

$= \frac{२}{\text{क}-\text{अ}}\int \frac{\text{ताल}}{\text{ग}^2-\text{ल}^2}$, यदि $\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{क}-\text{अ}} = \text{ग}^2$

$= \frac{२}{\text{क}-\text{अ}}\int \frac{१}{२\text{ग}}\left(\frac{\text{ताल}}{\text{ग}-\text{ल}}+\frac{\text{ताल}}{\text{ग}+\text{ल}}\right) = \frac{१}{\text{ग}(\text{क}-\text{अ})}\left(\int\frac{\text{ताल}}{\text{ग}-\text{ल}}+\int\frac{\text{ताल}}{\text{ग}+\text{ल}}\right)$

$$= \frac{१}{ग(क—अ)}\left(-\int\frac{—ताल}{ग—ल} + \int\frac{ताल}{ग+ल}\right)$$

$$= \frac{१}{ग(क—अ)}\Big[ला(ग+ल)—ला(ग—ल)\Big]$$

$$= \frac{१}{ग(क—अ)}ला\frac{ग+ल}{ग—ल} = \frac{१}{\sqrt{क—अ}}ला\frac{\sqrt{अ+क}+\sqrt{क—अ}\,स्प\frac{य}{२}}{\sqrt{अ+क}—\sqrt{क—अ}\,स्प\frac{य}{२}}$$

यदि $\sqrt{अ+क}—\sqrt{क—अ}\,स्प\frac{य}{२}$ यह ऋणात्मक हो तो

$$\int\frac{ताय}{अ+क\cdot कोज्याय} = \frac{१}{\sqrt{क—अ}}ला\frac{\sqrt{क—अ}\,स्प\frac{य}{२}+\sqrt{अ+क}}{\sqrt{क—अ}\,स्प\frac{य}{२}—\sqrt{अ+क}}$$

यदि यहां $\int\frac{ताय}{ग+क\cdot ज्याय}$ यह जानना हो तो

$य = \frac{\pi}{२}+ल$ कल्पना करने से $\int\frac{ताय}{अ+क\cdot ज्याय} = \int\frac{ताल}{अ+ककोज्याल}$ यह

ठीक १४ वें उदाहरण के ऐसा हो गया।

१५। जैसे ज्याय = र तो $ज्या^{-१}र = य$ अर्थात् ज्या से जिसका बोध होता है उस से उलटा $ज्या^{-१}$ से बोध होता है। इसी प्रकार कल्पना करो कि फ से जो बोध होता है उस से उलटा $फ^{-१}$ से तब $फ\{फ^{-१}(य)\} = य$ ऐसा होगा अर्थात् $फ^{-१}$ से यदि $ज्या^{-१}$ ग्रहण करो तो इसे ऐसे बोलेंगे कि य का जो क्रमज्या खण्ड पर से चाप हो उस की क्रमज्या य के बराबर है।

इस पर से यदि $\int फ(य)\,ताय$ इस का ज्ञान हो तो

$\int फ^{-१}(य) ताय$ इसका भी ज्ञान हो सकता है जैसे

यदि $फ^{-१}(य) = ल$ तो $य = फ(ल)$ तब

$फ^{-१}(य)\,ताय = \int ल\frac{ताय}{ताल}ताल = यल—\int यताल = य\,ल\int फ(ल)ताल$। ऊपर जो उदाहरण दिखाये गये हैं उनके बल से हज़ारहों चलानयन कर सकते हो और

जब अनन्त चल का मान आ गया तब उस में स्थिराङ्कों का उत्थापन देने से सान्तचलानयन भी सहज में कर सकते हो।

जैसे खण्ड चलानयन से

$$\int ज्या^{न} य ताय = - \int \frac{ताकोज्याय}{ताय} ज्या^{न-१} य ताय$$

$$= -कोज्याय ज्या^{न-१} य + (न-१) \int कोज्या^{२} य ज्या^{न-२} य ताय$$

$$= -कोज्याय ज्या^{न-१} य + (न-१) \int (१-ज्या^{२} य) ज्या^{न-२} य ताय$$

$$= -कोज्याय ज्या^{न-१} य + (न-१) \int ज्या^{न-२} य ताय$$

$-(न-१) \int ज्या^{न} य ताय$ सम शोधन से

$$न \int ज्या^{न} य ताय = -कोज्याय ज्या^{न-१} य + (न-१) \int ज्या^{न-२} य ताय$$

इस लिये $\int ज्या^{न} य ताय = - \frac{कोज्याय ज्या^{न-१} य}{न} + \frac{न-१}{न} \int ज्या^{न-२} य ताय$

यहां पर यदि न एक से अधिक और धन हो तो स्पष्ट है कि य के स्थान में ० और $\frac{\pi}{२}$ का उत्थापन देने से

$$\int_{०}^{\frac{\pi}{२}} ज्या^{न} य ताय = \frac{न-१}{न} \int_{०}^{\frac{\pi}{२}} ज्या^{न-२} य ताय ।$$

इसी प्रकार यदि न धन और ३ से अधिक हो तो

$$\int_{०}^{\frac{\pi}{२}} ज्या^{न-२} य ताय = \frac{न-३}{न-२} \int_{०}^{\frac{\pi}{२}} ज्या^{न-४} य ताय ।$$

इसी प्रकार यदि न धन और सम हो तो लगातार यही विधि करने से

$\int_{०}^{\frac{\pi}{२}} ताय = \frac{\pi}{२}$ और यदि धन न विषम हो तो अन्त में

$\int_{०}^{\frac{\pi}{२}} ज्याय ताय = १$ यह होगा। इस लिये

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{\text{न}}\text{य}\,\text{ता}\,\text{य} = \frac{(\text{न}-१)\,(\text{न}-३)\,(\text{न}-५)\cdots १}{\text{न}\,(\text{न}-२)\,(\text{न}-४)\cdots २}\,\frac{\pi}{२}\cdot \text{(यदि न सम)।}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{\text{न}}\text{य}\,\text{ता}\,\text{य} = \frac{(\text{न}-१)\,(\text{न}-३)\,(\text{न}-५)\cdots २}{\text{न}\,(\text{न}-२)\,(\text{न}-३)\cdots ३}\ \text{(यदि न विषम)।}$$

यहाँ कल्पना करो कि न धन और सम है तो

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{\text{न}}\text{य}\,\text{ता}\,\text{य} = \frac{\text{न}-१}{\text{न}}\cdot\frac{\text{न}-३}{\text{न}-२}\cdot\frac{\text{न}-५}{\text{न}-४}\cdots\frac{३}{४}\cdot\frac{१}{२}\cdot\frac{\pi}{२}\cdot \qquad (१)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{\text{न}-१}\text{य}\,\text{ता}\,\text{य} = \frac{\text{न}-२}{\text{न}-१}\cdot\frac{\text{न}-४}{\text{न}-३}\cdot\frac{\text{न}-६}{\text{न}-५}\cdots\frac{२}{३}\cdots \qquad (२)$$

अब यहाँ स्पष्ट है कि (२) प्रक्रम से श्रेढी में यदि मान ले आवो तो

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{\text{न}-१}\text{य}\,\text{ता}\,\text{य}$ यह $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{\text{न}-२}\text{य}\,\text{ता}\,\text{य}$ इस से छोटा और

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{\text{न}}\text{य}\,\text{ता}\,\text{य}$ इस से बड़ा है क्योंकि ऊपर के मान नीचे के मान से

उत्तरोत्तर छोटे हैं। परन्तु पूर्व सिद्ध है कि

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{\text{न}}\text{य}\,\text{ता}\,\text{य}}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{\text{न}-२}\text{य}\,\text{ता}\,\text{य}} = \frac{\text{न}-१}{\text{न}}\cdot\ \therefore\ \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{\text{न}}\text{य}\,\text{ता}\,\text{य}}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{\text{न}-१}\text{य}\,\text{ता}\,\text{य}}\ \text{यह १ से}$$

छोटा और $\frac{\text{न}-१}{\text{न}}$ से बड़ा है। इस लिये (१) और (२) के दहिने पक्ष का

संबन्ध १ से न्यून और $\frac{\text{न}-१}{\text{न}}$ से बड़ा हुआ। इस प्रकार से

$$\frac{\pi}{२} > \frac{२.२.४.४.६.६\cdots\cdots(\text{न}-२)\,(\text{न}-२)}{१.३.३.५.५.७\cdots\cdots(\text{न}-३)\,(\text{न}-१)}\quad \text{और}$$

$$\frac{\pi}{२} < \frac{२.२\ ४.४.६,६ \cdots\cdots (न-३)\ (न-२)}{१.३\ ३.५\ ५.७ \cdots\cdots (न-२)\ (न-१)} \frac{न}{न-२}$$ यह सिद्ध हुआ ।

रूप व्यासार्द्ध की परिधि जानने के लिये इसे वालिस का सूत्र Wallis's Formula कहते हैं। इस प्रकार से अनेक चमत्कृत सिद्धान्त नये उत्पन्न हो सकते हैं।

अभ्यास के लिये और उदाहरण

१। $\int \frac{ताय}{\sqrt{१-कय-य^२}} = ज्या^{-१} \frac{क+२य}{\sqrt{४+क^२}}$

२। $\int \frac{ताय}{\sqrt{१-५य-य^२}} = ज्या^{-१} \frac{५+२य}{\sqrt{२९}}$

३। $\int क \cdot य^{न} लायताय = \frac{क}{न+१} \cdot य^{न+१} \left(लाय - \frac{१}{न+१} \right)$

४। $\int २\ य^२ लायताय = \frac{२}{३} य^३ \left(लाय - \frac{१}{३} \right)$

५। $\int यलायताय = \frac{१}{२} य^२ \left(लाय - \frac{१}{२} \right)$

६। $\int लायताय = य\ (\ लाय - १\ )$

७। $\int अय\sqrt{य+१} = \frac{२अ}{५} (\ य+१\ )^{\frac{५}{२}} - \frac{२अ}{३} (य+१)^{\frac{३}{२}}$

८। $\int \frac{ताय}{\sqrt{य+२} - \sqrt{य+१}} = \frac{२}{३} \left\{ (\ य+२\ )^{\frac{३}{२}} + (य+१)^{\frac{३}{२}} \right\}$

९। $\int य^३ (\ ३+य^२\sqrt{३}\ )^{\frac{२}{३}}$

$$= \frac{१}{१६} (३+य\sqrt{३})^{\frac{८}{३}} - \frac{३}{१०} (\ ३+य\sqrt{३}\ )^{\frac{५}{३}}$$

१०। $\int (\ अ+कय\ )^२ य^४ ताय,$

$$= \frac{१}{क५} \left(\frac{र^७}{७} - \frac{२}{३} अर^६ + \frac{६}{५} अ^२ र^५ - अ^३ र^४ + \frac{अ^४}{३} र^३ \right)$$ यदि र = अ + कय

११। $\int \frac{य^५ ताय}{(१+२य)^४}$

$$= \frac{१}{६४}\left[\frac{र}{२} — \frac{५}{१}र + १०लार + \frac{१०}{र} — \frac{५}{२र} + \frac{१}{३र}\right]$$

यदि र = १ + २य।

१२। $\int \frac{ताय}{१+२य+३य^२} = \frac{१}{\sqrt{२}} स्प^{-१} \frac{३य+१}{\sqrt{२}}$

१३। $\int \frac{ताय}{४+५य+य^२} = \frac{१}{३} ला \left[\frac{य+१}{य+४}\right]$

१४। $\int \frac{ताय}{(य+४)(य+५)} = ला \frac{य+४}{य+५}$

१५। $\int \frac{(१+२य)ताय}{१+२य+३य^२}$

$$= \frac{१}{३}\left\{ ला(१+२य+३य^२) + \frac{१}{\sqrt{२}} स्प^{-१} \frac{३य+१}{\sqrt{२}} \right\}$$

१६। $\int \frac{(१+२य)\,ताय}{४+५य+य^२} = ला(४+५य+य^२) — \frac{४}{३} ला \left[\frac{य+१}{य+४}\right]$

१७। $\int \frac{(१+२य)\,ताय}{(य—अ)^२+क^२}$

$$= \frac{१+२अ}{क} स्प^{-१} \frac{य-अ}{क} + ला\left\{(य-अ)^२ + क^२\right\}$$

१८। $\int \frac{(१+२य)ताय}{य^२—४य+८} = \frac{५}{२} स्प^{-१} \frac{य-२}{२} + ला\left\{(य—२)^२+४\right\}$

१९। $\int \frac{रताय}{र—यकोज्याइ+य^२}$

$$= ज्याइ\; स्प^{-१} \frac{य—कोज्याइ}{ज्याइ} - \frac{कोज्याइ}{२} ला\left\{(य—१)^२ + ४यज्या^२\frac{इ}{२}\right\}$$

यदि र = १—य·कोज्याइ।

२०। $\int \frac{ताय\sqrt{१+य^२}}{य^२} = \frac{ला(य+\sqrt{१+य^२})^य - \sqrt{१+य^२}}{य}$

२१। $\int \frac{ताय\sqrt{१—य^२}}{य^२} = -\frac{\sqrt{१—य^२}}{य} — ज्या^{-१}य$

२२। सिद्ध करो कि $\int \frac{अ\cdot ताय}{य\sqrt{य^२—अ^२}} = — ज्या^{-१}\frac{अ}{य}$

वा $\int \frac{\text{अ}\cdot\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}^2 - \text{अ}^2}} = \text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{अ}}{\text{य}}$

२३ । सिद्ध करो कि $\int \frac{\text{अताय}}{\text{य}\sqrt{\text{य}^2 + \text{अ}^2}} = \text{ला}\,\frac{\text{य}}{\text{अ} + \sqrt{\text{य}^2 + \text{अ}^2}}$

२४ । सिद्ध करो कि $\int \frac{\text{अताय}}{\text{य}\sqrt{\text{अ}^2 - \text{य}^2}} = \text{ला}\,\frac{\text{य}}{\text{अ} + \sqrt{\text{अ}^2 - \text{य}^2}}$

२५ । $\int \frac{\text{ताय}}{\text{य}^2\sqrt{\text{य}^2 + \text{१}}} = -\left(\text{१} + \text{य}^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}$

२६ । $\int \frac{\text{ताय}}{\text{२+कोज्याय}} = \frac{\text{२}}{\sqrt{\text{३}}}\text{स्प}^{-1}\left[\frac{\text{१}}{\sqrt{\text{३}}}\text{स्प}\tfrac{1}{2}\text{य}\right]$

२७ । $\int \frac{\text{ताय}}{\text{१ + २कोज्याय}} = \frac{\text{१}}{\sqrt{\text{३}}}\,\text{ला}\,\frac{\text{स्प}\frac{1}{2}\text{य} + \sqrt{\text{३}}}{\text{स्प}\frac{1}{2}\text{य} - \sqrt{\text{३}}}$

२८ । $\text{पज्याप}\cdot\text{कोज्यापताप} = \frac{\text{ज्या२प}}{\text{८}} = \frac{\text{पकोज्या२प}}{\text{४}}$

२९ । $\int \frac{\text{इ}^{\text{कय}}\text{ताय}}{\text{इ}^{\text{२कय}} + \text{१}} = \frac{\text{१}}{\text{क}}\text{स्प}^{-1}\left(\text{इ}^{\text{कय}}\right)$

३० । $\int \frac{\sqrt{\text{य} + \text{क}}}{\sqrt{\text{य}}}\,\text{ताय} = \sqrt{\text{य}^2 + \text{कय}} + \text{क}\cdot\text{ला}\left(\sqrt{\text{य} + \text{क}} + \sqrt{\text{य}}\right)$

३१ । $\int \text{ज्या}^4\,\tfrac{1}{2}\,\text{यताय} = \frac{\text{३य}}{\text{८}} + \frac{\text{ज्या२य}}{\text{१६}} - \frac{\text{ज्या}\cdot\text{य}}{\text{२}}$

३२ । $\int \text{प}\cdot\text{स्पप छे}^2\,\text{पताप} = \frac{\text{छे}^2\text{प}}{\text{२}}\text{प} - \tfrac{1}{2}\,\text{स्पप}$

३३ । खण्डचलानयन से सिद्ध करो कि

$$\int \text{इ}^{\text{कय}}\text{कोज्याअयताय} = \frac{\text{इ}^{\text{कय}}\left(\text{ककोज्याअय} + \text{अज्याअय}\right)}{\text{अ}^2 + \text{क}^2}$$

३४ । सिद्ध करो कि

$$\int \text{इ}^{\text{अय}}\text{ज्यामय कोज्यानयताय}$$

$$= \frac{\text{इ}^{\text{अय}}\left\{\text{अज्या}\left(\text{म} + \text{न}\right)\text{य} - \left(\text{म} + \text{न}\right)\text{कोज्या}\left(\text{म} + \text{न}\right)\text{य}\right\}}{\text{२}\left\{\text{अ}^2 + \left(\text{म} + \text{न}\right)^2\right\}}$$

$$+ \frac{\text{इ}^{\text{अय}}\left\{\text{अज्या}\left(\text{म} - \text{न}\right)\text{य} - \left(\text{म} - \text{न}\right)\text{कोज्या}\left(\text{म} - \text{न}\right)\text{य}\right\}}{\text{२}\left\{\text{अ}^2 + \left(\text{म} - \text{न}\right)^2\right\}}$$

३५ । $\int \frac{\text{ताय}}{\text{ज्यायकोज्याय}} = \text{ला}\,(\,\text{स्पय}\,)$

३६ । $\int \frac{\text{ताय}}{\text{२ज्याय}} = \text{ला}\left(\text{स्प}\frac{\text{य}}{\text{२}}\right)^{\frac{१}{२}}$, और $\int \frac{\text{ताय}}{\text{२कोज्याय}}$

$= \text{ला}\left\{\text{कोस्प}\left(\frac{\pi}{\text{४}} - \frac{\text{य}}{\text{२}}\right)\right\}^{\frac{१}{२}} = \text{ला}\left\{\text{स्प}\left(\frac{\pi}{\text{२}} + \frac{\text{य}}{\text{२}}\right)\right\}^{\frac{१}{२}}$

३७ । $\int \frac{\text{कयताय}}{(\text{अ}-\text{य})^{\text{३}}} = \frac{\text{अक}}{\text{२}(\text{अ}-\text{य})} - \frac{\text{क}}{\text{अ}-\text{य}}$

३८ । $\int \frac{\text{२}+\text{कोज्याय}}{\text{२ य}+\text{ज्याय}}\text{ताय} = \text{ला}\,(\,\text{२ य}+\text{ज्याय})$

३९ । $\int \frac{\text{ताय}(\text{लाय})^{\text{म}}}{\text{य}} = \frac{(\,\text{लाय}\,)^{\text{म}+\text{१}}}{\text{म}+\text{१}}$

४० । $\frac{\text{२ताय}}{\text{कोज्याय}+\text{ज्याय}} = \sqrt{\text{२}}\ \text{ला}\left\{\text{स्प}\left(\frac{\pi}{\text{८}} + \frac{\text{य}}{\text{२}}\right)\right\}$

४१ । $\int \frac{\text{२य}+\text{२ज्याय}}{\text{१}+\text{कोज्याय}}\ \text{ताय} = \text{२य स्प}\frac{\text{य}}{\text{२}}$

४२ । $\int \frac{\text{ग}\cdot\text{ज्या}^{\text{२}}\text{यताय}}{\text{अ}+\text{ग}\cdot\text{कोज्या}^{\text{२}}\text{य}} = \frac{\text{ग}}{\text{क}}\left[\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{अ}}\right]^{\frac{१}{२}}\text{स्प}^{-१}\left(\text{स्पय}\sqrt{\frac{\text{अ}}{\text{अ}+\text{क}}}\right) - \frac{\text{गय}}{\text{क}}$

४३ । $\int \frac{\text{ताय}}{\text{अ}+\text{क}\cdot\text{ज्याय}+\text{ग}\cdot\text{कोज्याय}} = \int \frac{\text{ताय}}{\text{अ}+\text{ग}(\frac{\text{क}}{\text{ग}}\cdot\text{ज्याय}+\text{कोज्याय}\,)}$

$= \int \frac{\text{ताय}}{\text{अ}+\dfrac{\text{ग}}{\text{कोज्याइ}}\text{कोज्या}(\text{य}-\text{इ})} = \int \frac{\text{ताल}}{\text{अ}+\dfrac{\text{ग}}{\text{कोज्याइ}}\text{कोज्याल}}$

यदि $\frac{\text{क}}{\text{ग}} = \text{स्पइ},\ \text{य}-\text{इ} = \text{ल}$

अब १४वें उदाहरण से सिद्ध कर लो ।

४४ । $\int \frac{\text{अ}\cdot\text{यताय}}{\sqrt{\text{२अय}-\text{य}^{\text{२}}}} = \text{अ}^{\text{२}}\text{उज्या}^{-१}\frac{\text{य}}{\text{अ}} - \text{अ}\sqrt{\text{२अय}-\text{य}^{\text{२}}}$

४५ । $\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}^{\text{२}}-\text{८य}+\text{२}}} = \text{ला}\left\{\text{य}-\text{४}+\sqrt{\text{य}^{\text{२}}-\text{८य}+\text{२}}\right\}$

४६ । $\int \text{ताय स्प}^{\text{२न}}\text{य} = \frac{\text{य}^{\text{२न}-१}}{\text{२न}-१} - \frac{\text{य}^{\text{२न}-३}}{\text{२न}-३} + \frac{\text{य}^{\text{२न}-५}}{\text{२न}-५} - \frac{\text{य}^{\text{२न}-७}}{\text{२न}-७}$

$+\cdots\cdots-(-१)^{न}य+(-१)^{न}प$ यदि य = स्पप

४७ । $\int\left\{ला\left(\frac{य}{अ}\right)\right\}^{न}ताय = य\left\{ला\left(\frac{य}{अ}\right)\right\}^{न}-नय\left\{ला\left(\frac{य}{अ}\right)\right\}^{न-१}$

$+न(न-१)य\left\{ला\left(\frac{य}{अ}\right)\right\}^{न-२}-न(न-१)(न-२)य\left\{ला\left(\frac{य}{अ}\right)\right\}^{न-३}+\cdots\cdots$

४८ । $\int\left\{ला\left(\frac{य}{अ}\right)\right\}^{४}ताय = य\left\{ला\left(\frac{य}{अ}\right)\right\}^{४}-४य\left\{ला\left(\frac{य}{अ}\right)\right\}^{३}$

$+१२य\left\{ला\left(\frac{य}{अ}\right)\right\}^{२}-२४य\left\{ला\left(\frac{य}{अ}\right)\right\}+२४य$

४९ । $\int\frac{क\cdot उज्या^{-१}\frac{य}{अ}}{\sqrt{(२अय-य^२)}}ताय = \frac{क}{२}\left[उज्या^{-१}\frac{य}{क}\right]^{२}$

५० । $\int ला\left\{(लाय)^{\frac{१}{य}}\right\}ताय = लाय\left\{ला(लाय)-१\right\}$

५१ । सिद्ध करो कि

$$\int_{0}^{\pi} अपज्यापताप = \pi\cdot अ$$

५२ । $\int_{0}^{अ}ताय\sqrt{अ^२-य^२} = \frac{\pi अ^२}{४}$

५३ । $\int_{१}^{इ}\frac{ला(लाय)}{य}ताय = ०$

५४ । $\int_{0}^{\pi}इ^{-य}कोज्या^{४}यताय = \frac{२}{१५}(१+इ^{-\pi})$

५५ । $\int_{0}^{\frac{\pi}{४}}पस्पप छे^{२}पताप = \frac{\pi}{४}-\frac{१}{२}$

५६ । अकग वृत्तार्द्ध के के केन्द्र पर एक कीट बैठाथा और दूसरा अ विन्दु पर । दूसरा परिधि के राह से और पहला केग व्यासार्ध के राह से ग विन्दु पर आने के लिये चला । दूसरा परिधि में अ विन्दु से जितनी चापात्मक दूरी पर पहुँचता था उसकी कोटिज्या से उस के प्रतिक्षण की गति को गुण देने और व्यासार्द्ध का भाग देने से जो हो उतना प्रतिक्षण पहला चलता था तो वतावो कि जव दूसरा ग विन्दु पर पहुँचा उस समय पहला कहाँ पर पहुँचा ।

उ० के ही विन्दु पर लौट कर फिर पहुँचा ।

५०। एक लड़के ने एक सीधी १० हाथ की पङ्क्ति में चावलों को विछा दिया। उन चावलों को खाने के लिये एक जोड़ा कबूतर उतरे। नर एक सिरे से खाने लगा और मादा दूसरे सिरे से। नर उस सिरे से जितना हटता जाता था उससे उसके प्रतिक्षण की गति में भाग देने से जो लब्ध हो उतनी मादे की प्राति-क्षणिकगति है तो बतावो कि उस सिरे से कितनी दूरी पर नर मादा से मिलेगा।

उ० ७.९२ हाथ

इति प्रथमाध्याय।

द्वितीयाध्याय

अकरणीगत भिन्न संवन्ध का चलानयन।

१३। यदि तात्कालिक सम्बन्ध का रूप

$$\frac{\text{अ}' + \text{क}'\text{य} + \text{ख}'\text{य}^{२} + \cdots + \text{प}'\text{य}^{\text{म}}}{\text{अ} + \text{कय} + \text{खय}^{२} + \cdots + \text{पय}^{\text{न}}} \text{ ऐसा हो}$$

जहाँ $\text{अ}'$, $\text{क}'$, अ, क इत्यादि स्थिराङ्क हों और म, न धन और अभिन्न हों।

यहाँ यदि न से म बड़ा हो तो बीजगणित की साधारण भागविधि से अंश में हर का भाग देकर अभिन्न लब्धि ले आ सकते हो और शेष (जिस में कि सब से बड़ा य का घात न घात से अल्प रहेगा) के नीचे हर का हर लगा दो। इस प्रकार पूर्व भिन्न का रूप अभिन्न और भिन्न दो खण्डों के योग तुल्य जो होगा उस में अभिन्न का चल तो पहले अध्याय के सूत्रों से सहज में जाना जायगा परन्तु भिन्न के चलानयन के लिये पहले इस भिन्न को अनेक भिन्नों के योग के रूप में ले आने का यत्न करते हैं।

कल्पना करो कि वह भिन्न $\frac{\text{व}}{\text{भ}}$ है। जहाँ व और भ दोनों य के फल हैं और भ के मान में य का सब से बड़ा घात न है। लाघव के लिये मान लो कि भ में $\text{य}^{\text{न}}$ का गुणक १ है।

कल्पना करो कि

$$\text{भ} = (\text{य}-\text{अ}_{१})(\text{य}-\text{क}_{१})^{\text{त}}(\text{य}^{२}-२\text{अ}_{२}\text{य}+\text{अ}_{२}^{२}+\text{क}_{२}^{२})(\text{य}^{२}-२\text{ग}_{१}\text{य}+\text{ग}_{१}^{२}+\text{घ}_{१}^{२})^{\text{थ}}$$

अब यहाँ यदि भ = ० ऐसा समीकरण हो तो इस में य का

(१) एक मान $= \text{अ}_{१}$ सम्भव संख्या।

(२) त तुल्य सम्भव मान $= \text{क}_{१}$

(३) दो असम्भव मान $= \text{अ}_{२} \pm \text{क}_{२}\sqrt{-१}$

(४) थ जोड़े असम्भव मान, हर एक $= \text{ग}_{१} \pm \text{घ}_{१}\sqrt{-१}$

समीकरणों के सिद्धान्त से स्पष्ट है कि सब खण्डों का घात अवश्य भ के तुल्य होगा जहाँ १ + त + २ + २थ = न। मानो कि

$$\frac{\text{व}}{\text{भ}} = \frac{\text{आ}_{१}}{\text{य}-\text{अ}_{१}} + \frac{\text{का}_{१}}{(\text{य}-\text{क}_{१})^{\text{त}}} + \frac{\text{का}_{२}}{(\text{य}-\text{क}_{१})^{\text{त}-१}} + \frac{\text{का}_{३}}{(\text{य}-\text{क}_{१})^{\text{त}-२}} + \cdots$$

$$+ \frac{\text{का}_{\text{त}}}{\text{य}-\text{क}_{१}} + \frac{\text{खाय}+\text{गा}}{\text{य}^{२}-२\text{अ}_{२}\text{य}+\text{अ}_{२}^{२}+\text{क}_{२}^{२}}$$

$$+\frac{च_1 य + ज_1}{(य^2 - 2ग_1 य + ग_1^2 + घ_1^2)^{थ}} + \frac{च_2 य + ज_2}{(य^2 - 2ग_1 य + ग_1^2 + घ_1^2)^{थ-1}} + \cdots$$

$$+\frac{च_थ य + ज_थ}{य^2 - 2ग_1 य + ग_1^2 + घ_1^2}$$

जहाँ आ, $का_1$, $का_2$, खा, गा, $च_1$, $ज_1$, इत्यादि सब स्थिराङ्क हैं।

यहाँ यदि दहिने पक्ष के सब भिन्नों का समच्छेद विधि से योग करें तो स्पष्ट है कि अंश मान व के तुल्य होगा। अब इस स्वरूप समीकरण में य के समान घातों के गुणकों को समान करने से स्थिराङ्कों का मान व्यक्त हो जायगा।

१४। भ के मान में $(य-क_1)^त$ इसके अवशिष्ट खण्डों के घात को फा(य) कल्पना करो और व को फ(य) मानो तो

$$\frac{व}{भ} = \frac{फ(य)}{(य-क_1)^त फा(य)} = \frac{फ(य) - \frac{फ(क_1)}{फा(क_1)} फा(य)}{(य-क_1)^त फा(य)} + \frac{\frac{फ(क_1)}{फा(क_1)}}{(य-क_1)^त}$$

यहाँ स्पष्ट देख पड़ता है कि यदि $य = क_1$ तो

$$फ(य) - \frac{फ(क_1)}{फा(क_1)} फा(य) = 0$$

इस लिये $(य-क_1)$ इससे $फ(य) - \frac{फ(क_1)}{फा(क_1)} फा(य)$ यह निःशेष होगा।

मानो कि $य - क_1$ इस का भाग देने से लब्धि = फि(य) तो

$$\frac{व}{भ} = \frac{फ(य)}{(य-क_1)^त फा(य)} = \frac{फि(य)}{(य-क_1)^{त-1} फा(य)} + \frac{फ(क_1)}{फा(क_1)} \frac{1}{(य-क_1)^त}।$$

इसी रीति से

$$\frac{फि(य)}{(य-क_1)^{त-1} फा(य)} = \frac{फि(य) - \frac{फि(क_1)}{फा(क_1)} फा(य)}{(य-क_1)^{त-1} फा(य)} + \frac{\frac{फि(क_1)}{फा(क_1)}}{(य-क_1)^{त-1}},$$

यहाँ भी यदि $य = क_1$ तो $य - क_1$ से $फि(य) - \frac{फि(क_1)}{फा(क_1)} फा(य)$ निःशेष होगा। मानो कि भाग देने से लब्धि = फी(य) तो

$$\frac{फ(य)}{(य-क_1)^त फा(य)} = \frac{फी(य)}{(य-क_1)^{त-2} फा(य)} + \frac{फ(क_1)}{फा(क_1)} \frac{1}{(य-क_1)^त}$$

$$+\frac{फि(क_1)}{फा(क_1) \cdot (य-क_1)^{त-1}}$$

यों बार बार क्रिया करने से भी स्पष्ट हो जायगा कि

$\frac{फ(य)}{(य-क_1)^न फा(य)}$ इस का मान अनेक खण्ड भिन्नों में ला सकते हैं।

जिनके मान क्रम से $\frac{फ(क_1)}{फा(क_1)} \cdot \frac{1}{(य-क_1)^न}, \frac{फि(क_1)}{फा(क_1)} \frac{1}{(य-क_1)^{न-1}}$

इत्यादि हैं। यहाँ अत्यन्त स्पष्ट है कि $\frac{फ(क_1)}{फा(क_1)}, \frac{फि(क_1)}{फा(क_1)}$ इत्यादि स्थिराङ्क हैं इस लिये १३वें प्रक्रम में जो आ, $का_1$, $का_2$ इत्यादि स्थिराङ्क कल्पना किया है वह ठीक है। इस प्रकार आ, $का_1$, $का_2$ इत्यादि को स्थिराङ्क ठहराना मिस्टर होमरशम काकस (Mr Homersham Cox) ने अपने चलराशिकलन (Integral Calculus) में लिखा है। इस प्रकार अकरणीगत भिन्न को खण्ड भिन्नों के रूप में ला सकते हैं।

इसी तरह यदि भ = $(य-अ_1)(य-क_1)(य-ख_1)\cdots$ ऐसा हो जहाँ $अ_1$, $क_1$, $ख_1$, इत्यादि सब परस्पर भिन्न और सम्भाव्य संख्या हैं

तो $\frac{ब}{भ} = \frac{आ_1}{य-अ_1} + \frac{का_1}{य-क_1} + \frac{खा_1}{य-ख_1} + \cdots$ ऐसा कल्पना कर सकते हो फिर पूर्ववत् सरूप समीकरण से $आ_1$, $का_1$, $खा_1$ इत्यादि के मान जान सकते हो।

१५। लाघव से भी $आ_1$, $का_1$, इत्यादि का मान निकाल सकते हो कल्पना करो कि $\frac{ब}{भ} = \frac{फ(य)}{फा(य)}$ और $फा(य) = (य-अ_1)(य-क_1)\cdots$ तो

$$\frac{फ(य)}{फा(य)} = \frac{आ_1}{य-अ_1} + \frac{का_1}{य-क_1} + \frac{खा_1}{य-ख_1} + \cdots$$

इस लिये

$$फ(य) = आ_1 (य-क_1)(य-ख_1)\cdots$$
$$+ का_1 (य-अ_1)(य-ख_1)\cdots + खा_1 (य-अ_1)(य-क_1)\cdots +$$

इस सरूप समीकरण में चाहे य का मान जो मानो परन्तु समीकरण सत्य ही रहेगा इस लिये मानो कि $य = अ_1$ तो

$$फ(अ_1) = आ_1 (अ_1-क_1)(अ_1-ख_1)\cdots (1)$$

क्योंकि और खण्ड = ०

परन्तु $फा(य) = (य-अ_1)(य-क_1)(य-ख_1)\cdots$

इस लिये $फा'(य) = (य—क_१)(य—ख_१) \cdots + (य—अ_१)(य—ख_१) \cdots$
$+ (य—अ_१)(य—क_१) \cdots + \cdots$

य के स्थान में $अ_१$ का उत्थापन देने से

$फा'(अ_१) = (अ_१—क_१)(अ_१—ख_१) \cdots$

इस लिये (१) समीकरण का रूप

$$फ(अ_१) = आ_१ फा'(अ_१) \therefore आ_१ = \frac{फ(अ_१)}{फा'(अ_१)}$$

इसी तरह $का_१ = \frac{फ(क_१)}{फा'(क_१)}$ $खा_१ = \frac{फ(ख_१)}{फा'(ख_१)}$, इत्यादि ।

(१) उदाहरण $\int \frac{५य^३—१००य+१५१}{य^२—५य+६}$ ताय इस का मान बतावो ।

यहाँ $\frac{५य^३—१००य+१५१}{य^२—५य+६} = ५य+२५+\frac{—५य+१}{य^२—५य+६}$

$$= ५य+२५+\frac{आ_१}{य—२}+\frac{का_१}{य—३}$$

समच्छेद करने से, $—५य+१ = य(आ_१+का_१)—(३आ_१+२का_१)$

इस लिये सरूप समीकरण से

$—५ = आ_१+का_१, \quad —१ = ३आ_१+२का_१$

$\therefore आ_१ = ९, का_१ = —१४$, इस लिये

$$\int \frac{५य^३—१००य+१५१}{य^२—५य+६} ताय$$

$$= \int ५य ताय + \int २५ ताय + ९\int \frac{ताय}{य—२} —१४ \int \frac{ताय}{य—३}$$

$$= \frac{५}{२}य^२ + २५ य + ९ ला(य—२) — १४ ला(य—३)$$

यह तेरहवें प्रक्रम की विधि से आया है ।

१५वें प्रक्रम से निकालना हो तो अभिन्न खण्ड को छोड़ कर

$\frac{—५य+१}{य^२—५य+६} = \frac{—५य+१}{(य—२)(य—३)} = \frac{फ(य)}{फा(य)}$, यहाँ $अ_१ = २, क_१ = ३$,

$फ(य) = —५य+१$, $फा(य) = (य—२)(य—३)$ और

$फा'(य) = २य—५$ इस लिये $आ_१ = \frac{फ(अ_१)}{फा'(अ_१)} = \frac{—५\times२+१}{२\times२—५} = \frac{—९}{—१} = ९$

और $का_{१} = \frac{फ(क_{१})}{फा'(क_{१})} = \frac{—५ \times ३ + १}{२ \times ३ — ५} = \frac{—१४}{१} = — १४$,

फिर पूर्ववत् क्रिया करो।

देखो १५वें प्रक्रम से कैसा लाघव से $आ_{१}$ और $का_{१}$ का मान आया है।

(२) उ०। $\int \frac{य^{२} + १}{(य—१)(य+२)(य—३)}$ ताय इस का मान जानना है।

यहाँ $अ_{१} = १$, $क_{१} = —२$, $ख_{१} = ३$, $फ(य) = य^{२} + १$

$फा(य) = (य—१)(य+२)(य—३)$,

$फा'(य) = (य+२)(य—३) + (य—१)(य—३) + (य—१)(य+२)$

इस लिये

$$आ_{१} = \frac{फ(अ_{१})}{फा'(अ_{१})} = \frac{२}{३(—२)} = — \frac{१}{३},$$

$$का_{१} = \frac{फ(क_{१})}{फा'(क_{१})} = \frac{५}{(—३)(—५)} = + \frac{१}{३},$$

$$खा_{१} = \frac{फ(ख_{१})}{फा'(ख_{१})} = \frac{१०}{२ \times ५} = १$$

इन का उत्थापन देने से

$$\frac{य^{२} + १}{(य—१)(य+२)(य—३)} = \frac{१}{य—३} + \frac{१}{३} \cdot \frac{१}{य+२} — \frac{१}{३} \cdot \frac{१}{य—१}$$

$$\therefore \int \frac{य^{२} + १}{(य—१)(य+२)(य—३)} ताय$$

$$= ला\,(य—३) + \tfrac{१}{३}\, ला\,\,य+२) — \tfrac{१}{३}\, ला\,(य—१)$$

१६। पूर्व भिन्न में यदि $फा(य) = (य—क_{१})^{न}\, फि(य)$ ऐसा हो तो पूर्ववत् कल्पना करो कि

$$\frac{ब}{भ} = \frac{फ(य)}{फा(य)} = \frac{फ(य)}{(य—क_{१})^{न} फि(य)} = \frac{का_{१}}{(य—क_{१})^{न}} + \frac{का_{२}}{(य—क_{१})^{न-१}} + \cdots$$

$$+ \frac{का_{न}}{य—क_{१}} + \frac{फी(य)}{फि(य)}$$

जहाँ $\frac{फी(य)}{फि(य)}$ यह और खण्डभिन्नों का योग है।

ऊपर के समीकरण में दोनों पक्षों को $(\text{य}—\text{क}_१)^\text{न}$ से गुण देने से

$$\frac{\text{फ(य)}}{\text{फि(य)}} = \text{फ}_१(\text{य}) = \text{का}_१ + \text{का}_२ (\text{य}—\text{क}_१) + \text{का}_३ (\text{य}—\text{क}_१) + \cdots$$

$$+ \frac{\text{फी(य)}}{\text{फि(य)}} (\text{य}—\text{क}_१)^\text{न}$$

य के स्थान में $\text{क}_१$ का उत्थापन देने से

$$\text{फ}_१(\text{क}_१) = \text{का}_१$$
$$\text{फ}'_१(\text{क}_१) = \text{का}_२$$
$$\text{फ}''_१(\text{क}_१) = २\ \text{का}_३$$
$$\text{फ}'''_१(\text{क}_१) = २\cdot३\ \text{का}_४$$
$$\text{फ}_१^{\text{न}-१}(\text{क}_१) = \underline{|\text{न}—१}\ \text{का}_\text{न}$$

(१) उदाहरण $\int \frac{११\text{य}^३ + ९\text{य}^२ + ७\text{य} + ५}{\text{य}^४—५\text{य}^३ + ६\text{य}^२ + ४\text{य}—८}$ ताय इसका मान जानना है तो

यहाँ $\frac{११\text{य}^३ + ९\text{य}^२ + ७\text{य} + ५}{\text{य}^४—५\text{य}^३ + ६\text{य}^२ + ४\text{य}—८} = \frac{११\text{य}^३ + ९\text{य}^२ + ७\text{य} + ५}{(\text{य}—२)^३(\text{य} + १)}$, इस लिये

$\text{क}_१ = २$, $\text{न} = ३$, $\text{फि(य)} = \text{य} + १$ । $\text{फ}_१(\text{य}) = \frac{११\text{य}^३ + ९\text{य}^२ + ७\text{य} + ५}{\text{य} + १}$

$$\text{फ}'_१(\text{य}) = \frac{३३\text{य}^२ + १८\text{य} + ७}{\text{य} + १} — \frac{११\text{य}^३ + ९\text{य}^२ + ७\text{य} + ५}{(\text{य} + १)^२}$$

$$\text{फ}''_१(\text{य}) = \frac{६६\text{य} + १८}{\text{य} + १} — \frac{२(३३\text{य}^२ + १८\text{य} + ७)}{(\text{य} + १)^२} + \frac{२(११\text{य}^३ + ९\text{य}^२ + ७\text{य} + ५)}{(\text{य} + १)^३}$$

$$\text{इस लिये फ}_१(\text{क}_१) = \frac{११\times८ + ९\times४ + ७\times२ + ५}{२ + १} = \frac{८८ + ३६ + १४ + ५}{३}$$

$$= \frac{१४३}{३} = \text{का}_१$$

$$\text{फ}'_१(\text{क}_१) = \frac{३३\times४ + १८\times२ + ७}{२ + १} — \frac{१४३}{९} = \frac{१३२ + ३६ + ७}{३} — \frac{१४३}{९}$$

$$= \frac{१७५}{३} — \frac{१४३}{९} = \frac{५२५}{९} — \frac{१४३}{९} = \frac{३८२}{९} = \text{का}_२$$

$$\text{और फ}''_१(\text{क}_१) = \frac{१५०}{३} — \frac{२(१३२ + ३६ + ७)}{९} + \frac{१४३\times२}{२७}$$

$$= \frac{१३५०}{२७} — \frac{१०५०}{२७} + \frac{१४३\times२}{२७} = \frac{३००}{२७} + \frac{२८६}{२७} = \frac{५८६}{२७}, \therefore \frac{२९३}{२७} = \text{का}_३$$

इस लिये भिन्न का रूपान्तर

$$\frac{\text{१४३}}{\text{३}}\frac{\text{१}}{(\text{य}-\text{२})^{\text{३}}}+\frac{\text{३८२}}{\text{९}}\frac{\text{१}}{(\text{य}-\text{२})^{\text{२}}}+\frac{\text{२९३}}{\text{२७}}\frac{\text{१}}{\text{य}-\text{२}}+\frac{\text{४}}{\text{२७}}\frac{\text{१}}{\text{य}+\text{१}}$$

तब

$$\int\frac{\text{११य}^{\text{३}}+\text{९य}^{\text{२}}+\text{७य}+\text{५}}{\text{य}^{\text{४}}-\text{५य}^{\text{३}}+\text{६य}^{\text{२}}+\text{४य}-\text{८}}\text{ताय}$$

$$=\frac{\text{१४३}}{\text{३}}\int\frac{\text{ताय}}{(\text{य}-\text{२})^{\text{३}}}+\frac{\text{३८२}}{\text{९}}\int\frac{\text{ताय}}{(\text{य}-\text{२})^{\text{२}}}+\frac{\text{२९३}}{\text{२७}}\int\frac{\text{ताय}}{\text{य}-\text{२}}+\frac{\text{४}}{\text{२७}}\int\frac{\text{ताय}}{\text{य}+\text{१}}$$

$$=\frac{\text{२९३}}{\text{२७}}\text{ला}(\text{य}-\text{२})+\frac{\text{४}}{\text{२७}}\text{ला}(\text{य}+\text{१})-\frac{\text{१४३}}{\text{६}(\text{य}-\text{२})^{\text{२}}}-\frac{\text{३८२}}{\text{९}(\text{य}-\text{२})}$$

१७ । यदि भिन्न के हर में एक जोड़ा असम्भव राशि भी हो अर्थात् एक मान $\text{अ}+\text{क}\sqrt{-\text{१}}$ हो और दूसरा $\text{अ}-\text{क}\sqrt{-\text{१}}$ तो मानो कि

$$\frac{\text{ब}}{\text{भ}}=\frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{फा}(\text{य})}=\frac{\text{आ}_{\text{१}}}{\text{य}-(\text{अ}+\text{क}\sqrt{-\text{१}})}+\frac{\text{आ}_{\text{२}}}{\text{य}-(\text{अ}-\text{क}\sqrt{-\text{१}})}+\frac{\text{फी}(\text{य})}{\text{फि}(\text{य})}$$

जहाँ $\frac{\text{फी}(\text{य})}{\text{फि}(\text{य})}$ और खण्डों का योग है तो समच्छेद करने से

$$\text{फ}(\text{य})=\text{आ}_{\text{१}}\{\text{य}-(\text{अ}-\text{क}\sqrt{-\text{१}})\}\,\text{फि}(\text{य})$$
$$+\text{आ}_{\text{२}}\{\text{य}-(\text{अ}+\text{क}\sqrt{-\text{१}})\}\,\text{फि}(\text{य})$$
$$+\text{फी}(\text{य})\{\text{य}-(\text{अ}+\text{क}\sqrt{-\text{१}})\}\{\text{य}-(\text{अ}-\text{क}\sqrt{-\text{१}})\}$$
$$=\{(\text{आ}_{\text{१}}+\text{आ}_{\text{२}})\text{य}-(\text{आ}_{\text{१}}+\text{आ}_{\text{२}})\text{अ}+\text{क}(\text{आ}_{\text{१}}-\text{आ}_{\text{२}})\sqrt{-\text{१}}\}\,\text{फि}(\text{य})$$
$$+\text{फी}(\text{य})\{\text{य}^{\text{२}}-\text{२अय}+\text{अ}^{\text{२}}+\text{क}^{\text{२}}\}$$

अब यहाँ य के मान में $\text{अ}+\text{क}\sqrt{-\text{१}}$ वा $\text{अ}-\text{क}\sqrt{-\text{१}}$ का उत्थापन देने से स्पष्ट है कि $\text{य}^{\text{२}}-\text{२अय}+\text{अ}^{\text{२}}+\text{क}^{\text{२}}=\text{०}$

अर्थात् $\text{य}^{\text{२}}-\text{२अय}-(\text{अ}^{\text{२}}+\text{क}^{\text{२}})$ तब ऊपर के समीकरण का रूप

$$\text{फ}(\text{य})=\{(\text{आ}_{\text{१}}+\text{आ}_{\text{२}})\text{य}-(\text{आ}_{\text{१}}+\text{आ}_{\text{२}})\text{अ}+\text{क}(\text{आ}_{\text{१}}-\text{आ}_{\text{२}})\sqrt{-\text{१}}\}\,\text{फि}(\text{य})\cdots(\text{१})$$

ऐसा होगा ।

(१) इस में बार बार यदि $\text{य}^{\text{२}}$ के स्थान में $\text{२अय}-(\text{अ}^{\text{२}}+\text{क}^{\text{२}})$ का उत्थापन दो तो स्पष्ट है कि अन्त में $\text{दाय}+\text{ध}=\text{दा}'\text{य}+\text{ध}'$ ऐसा स्वरूप होगा फिर इस में य के स्थान में $\text{अ}+\text{क}\sqrt{-\text{१}}$ वा $\text{अ}-\text{क}\sqrt{-\text{१}}$ का उत्थापन देने से और असम्भाव्य तथा सम्भाव्य संख्याओं के गुणक समान करने से $\text{दा}'$ और $\text{ध}'$

प्रकट हो जायँगे इन पर से ($आ_१ + आ_२$) और ($आ_१ + आ_२$)अ भी प्रकट हो जायंगे। अथवा

$$\frac{फ(य)}{फा(य)} = \frac{आ_१}{य—(अ+क\sqrt{—१})} + \frac{आ_२}{य—(अ—क\sqrt{—१})} + \frac{फी(य)}{फि(य)}$$

$$= \frac{आ_१य—(आ_१अ—आ_१क\sqrt{—१}) + आ_२य—(आ_२अ+आ_२क\sqrt{—१})}{य^२—२अय+अ^२+क^२} + \frac{फी(य)}{फि(य)}$$

$$= \frac{खाय+गा}{य^२—२अय+अ^२+क^२} + \frac{फी(य)}{फि(य)}$$ जहाँ य का गुणक खा है और अवशिष्ट गा हैं। अब पूर्ववत् समच्छेद करने से और य के समान घातों के गुणक समान करने से खा, और गा व्यक्त हो जायंगे।

(१) उदाहरण $\int \frac{ताय}{अ^३+य^३}$ इस का मान जानना है।

यहाँ $\frac{१}{अ^३+य^३} = \frac{१}{(अ+य)(अ^२-अय+य^२)} = \frac{आ_१}{य+अ} + \frac{खाय+गा}{य^२—अय+अ^२}$

समच्छेद कर अंश को रूप के तुल्य करने से

$१ = आ_१य^२—अआ_१य + आ_१अ^२ + खाय^२ + अखाय + गाय + गाअ$

$= य^२(आ_१+खा) + य(अखा+गा—अआ_१) + आ_१अ^२ + गाअ$

इस लिये $आ_१ + खा = ०$। $अखा + गा — अ आ_१ = ०$।

$१ = अ\ (आ_१अ + गा)$

$$\left.\begin{array}{r} अ\ आ_१ + अ\ खा = ० \\ गा—अ\ आ_१ + अ\ खा = ० \end{array}\right| \begin{array}{r} गा + २अखा = ०\ \therefore\ गा = —\ २\ अ\cdot खा \\ आ_१ = —\ खा \end{array}$$

$अ\ आ_१ = —\ अखा\ \therefore\ १ = अ(आ_१\ अ + गा) = अ(—अखा—२अखा)$

$= —\ ३\ अ^२खा$

$\therefore — \frac{१}{३अ^२} = खा,\ आ_१ = \frac{१}{३अ^२}$ और $गा = —\ २\ अखा = \frac{२}{३अ}$

इस लिये इनके उत्थापन से

$$\int\frac{ताय}{अ^३+य^३} = \int\frac{ताय}{३अ^२(य+अ)} + \int\frac{—\frac{य}{३अ^२}+\frac{२}{३अ}}{य^२—अय+अ^२}\ ताय$$

$$= \frac{१}{३अ^२}\ ला\ (य+अ) — \frac{१}{३अ^२}\int\frac{य—२\ अ}{य^२—अय+अ^२}\ ताय$$

$$= \frac{१}{३अ^२} \text{ला } (य + अ) — \frac{१}{६अ^२}\int \frac{२य — अ — ३अ}{य^२ — अय + अ^२} \text{ताय}$$

$$= \frac{१}{३अ^२} \text{ला } (य + अ) — \frac{१}{६अ^२}\int \frac{२ य — अ}{य^२ — अय + अ^२} \text{ताय}$$

$$— \frac{१}{६अ^२}\int \frac{—३अ}{य^२ — अय + अ^२} \text{ताय}$$

$$= \frac{१}{३अ^२} \text{ला}(य + अ) — \frac{१}{६अ^२} \text{ला}(य^२ — अय + अ^२) + \frac{३}{६अ}\int \frac{\text{ताय}}{य^२ — अय + अ^२}$$

$$= \frac{१}{३अ^२} \text{ला}(य + अ) — \frac{१}{६अ^२} \text{ला}(य^२ — अय + अ^२)$$

$$+ \frac{१}{२अ}\int \frac{\text{ताय}}{(य — \frac{अ}{२})^२ + \frac{३अ^२}{४}} \text{ यदि } ल = य — \frac{अ}{२}$$

$$= \frac{१}{३अ^२} \text{ला } (य + अ) — \frac{१}{६अ^२} \text{ला}(य^२ - अय + अ^२) + \frac{१}{२अ}\int \frac{\text{ताल}}{ल^२ + \frac{३}{४}अ^२}$$

$$= \frac{१}{३अ^२} \text{ला}(य + अ) — \frac{१}{६अ^२} \text{ला}(य^२ — अय + अ^२) + \frac{२}{अ\sqrt{३}}\,\frac{१}{२अ} \text{स्प}^{-१} \frac{२य — अ}{अ\sqrt{३}}$$

$$= \frac{१}{३अ^२} \text{ला}(य + अ) — \frac{१}{६अ^२} \text{ला}(य^२ — अय + अ^२) + \frac{१}{अ^२\sqrt{३}} \text{स्प}^{-१} \frac{२य — अ}{अ\sqrt{३}}$$

वा, $१ = आ_१(य^२ — अय + अ^२) + (खाय + गा)(य + अ)$ इस में यदि $य = —अ$

तो $१ = आ_१(अ^२ + अ^२ + अ^२) = ३अ^२आ_१ \therefore आ_१ = \frac{१}{३अ^२}$ समीकरण में

इस का उत्थापन देने से

$$३अ^२ = य^२ — अ य + अ^२ + ३अ^२ (खाय + गा) (य + अ)$$

समशोधन से $३अ^२(खाय + गा) (य + अ) = २अ^२ + अय — य^२$

दोनों पक्षों में $य + अ$ का भाग देने से $३अ^२ (खाय + गा) = २अ — य$

$\therefore खाय + गा = \frac{२अ — य}{३अ^२}$ इन पर से फिर पूर्वोक्त क्रिया करो ।

अथवा इसी प्रक्रम के (१) समीकरण से यहाँ

$$फ(य) = १ = \{ (आ_१ + आ_२)य — (आ_१ + आ_२)अ + क(आ_१ — आ_२)\sqrt{—१} \} फि(य)$$

$$= (खाय + गा) (य + अ) = खाय^२ + गाय + अखाय + गाअ$$

$$= खाय^२ + (गा + अखा)य + गाअ$$

$$खा(अय—अ^२) + (गा + अखा)य + गाअ = य(गा + २अखा) + गाअ—अ^२खा$$

(यहाँ $खा = आ_१ + आ_२$ । $गा = (आ_१ + आ_२)अ + क(आ_१—आ_२)\sqrt{—१}$

अब $य = \frac{अ + अ\sqrt{३}\sqrt{—१}}{२}$ मानने से

$$१ = \frac{(अ + अ\sqrt{३}\sqrt{—१})}{२}(गा + २अखा) + गाअ—अ^२खा ।$$

$$= \frac{अ}{२}(गा + २अखा) + गाअ—अ^२खा + \frac{अ\sqrt{३}\sqrt{—१}}{२}(गा + २अखा)$$

सम्भाव्य और असम्भाव्य के गुणक को तुल्य करने से

$$१ = \frac{अ}{२}(गा + २अखा) + गाअ—अ^२खा । गा + २अखा = ०$$

$\therefore १ = गाअ—अ^२खा$ और $गा = —२अखा$

$\therefore १ = गाअ—अ^२खा = —२अ^२खा—अ^२खा = —३अ^२खा$

$\therefore खा = —\frac{१}{३अ^२}$ फिर अब पूर्ववत् क्रिया करो ।

१८ । यदि भिन्न के हर में एक जोड़ा असम्भव मान त वार हो तो पूर्ववत्

$$\frac{व}{भ} = \frac{फ(य)}{फा(य)} = \frac{खा_तय + गा_त}{(य^२—दय + ध)^त} + \frac{खा_{त—१}य + गा_{त—१}}{(य^२—दय + ध)^{त—१}} + \cdots$$
$$+ \frac{खा_१य + गा_१}{य^२—दय + ध} + \frac{फी(य)}{फि(य)}$$ ऐसा मानने से

$फा(य) = (य^२—दय + ध)^तफि(य)$ ऐसा हुआ । फिर समच्छेद करने से

$$फ(य) = (खा_तय + गा_त)\ फि(य)$$
$$+ (खा_{त—१}य + गा_{त—१})\ (य^२—दय + ध)\ फि(य)$$
$$+ \cdots + (य^२—दय + ध)^तफी(य) \cdots\cdots (१)$$

अब यहाँ य के स्थान में उसके असम्भव मान का उत्थापन दो अर्थात् $य^२—दय + ध = ०$ के मानो तो

(१) का लघुरूप

$$फ(य) = (खा_त + गा_त)\ फि(य)$$

यहाँ १७वें प्रक्रम से $खा_त$ और $गा_त$ का मान निकाल समशोधन करने से

(१) समीकरण का रूप

$$\text{फ}(\text{य}) - (\text{खा}_{\text{त}} + \text{गा}_{\text{त}})\ \text{फि}(\text{य})$$
$$= (\text{खा}_{\text{त}-१} + \text{गा}_{\text{त}-१})\ (\text{य}^{२} - \text{दय} + \text{ध})\ \text{फि}(\text{य}) + \cdots \text{ हुआ।}$$

यह सरूप समीकरण है और यहाँ दहिना पक्ष $\text{य}^{२} - \text{दय} + \text{ध}$ इससे निःशेष होता है इस लिये बायाँ पक्ष भी निःशेष होगा कल्पना करो कि भाग देने से लब्धि $\text{फ}_{१}(\text{य})$ है तो

$$\text{फ}_{१}(\text{य}) = (\text{खा}_{\text{त}-१} + \text{गा}_{\text{त}-१})\ \text{फि}(\text{य})$$
$$+ (\text{खा}_{\text{त}-२} + \text{गा}_{\text{त}-२})\ (\text{य}^{२} - \text{दय} + \text{ध})\ \text{फि}(\text{य}) + \cdots \quad (२)$$

यहाँ भी यदि $\text{य}^{२} - \text{दय} + \text{ध} = ०$ तो (२) का रूप

$\text{फ}_{१}(\text{य}) = (\text{खा}_{\text{त}-१} + \text{गा}_{\text{त}-१})\ \text{फि}(\text{य})$ इस से १७वें प्रक्रम से

$\text{खा}_{\text{त}-१}$ और $\text{गा}_{\text{त}-१}$ निकाल फिर समशोधन और $\text{य}^{२} - \text{दय} + \text{ध}$ का दोनों पक्षों में भाग देने से बायें पक्ष को $\text{फ}_{२}(\text{य})$ मानने से और $\text{य}^{२} - \text{दय} + \text{ध} = ०$ करने से इसी प्रकार $\text{खा}_{\text{त}-२}$, $\text{गा}_{\text{त}-२}$ इत्यादि भी व्यक्त हो जायंगे।

(१) उदाहरण $\int \dfrac{\text{क}(\text{य}^{२} - ३\text{य} - २)}{(\text{य}^{२} + \text{य} + १)^{२}(\text{य} + १)^{२}}$ ताय इसका मान जानना है तो

$$\text{यहाँ } \frac{\text{य}^{२} - ३\text{य} - २}{(\text{य}^{२} + \text{य} + १)^{२}(\text{य} + १)^{२}} = \frac{\text{खा}_{२}\text{य} + \text{गा}_{२}}{(\text{य}^{२} + \text{य} + १)^{२}} + \frac{\text{खा}_{१}\text{य} + \text{गा}_{१}}{\text{य}^{२} + \text{य} + १}$$
$$+ \frac{\text{फी}(\text{य})}{(\text{य} + १)^{२}}$$

$$\text{तब } \text{य}^{२} - ३\text{य} - २ = (\text{खा}_{२}\text{य} + \text{गा}_{२})\ (\text{य} + १)^{२}$$
$$+ (\text{खा}_{१}\text{य} + \text{गा}_{१})\ (\text{य}^{२} + \text{य} + १)\ (\text{य} + १)^{२} + (\text{य}^{२} + \text{य} + १)^{२}\text{फी}(\text{य}) \cdots\cdots (३)$$

इस में $\text{य}^{२} + \text{य} + १ = ०$ करने से

$$\text{य}^{२} - ३\text{य} - २ = (\text{खा}_{२}\text{य} + \text{गा}_{२})\ (\text{य} + १)^{२}$$
$$= (\text{खा}_{२}\text{य} + \text{गा}_{२})\ (\text{य}^{२} + २\text{य} + १)$$

$\text{य}^{२}$ के स्थान में $- \text{य} - १$ का उत्थापन देने से

$$- ४\text{य} - ३ = (\text{खा}_{२}\text{य} + \text{गा}_{२})\ \text{य}$$
$$= \text{खा}_{२}\text{य}^{२} + \text{गा}_{२}\text{य} = - \text{खा}_{२}\text{य} - \text{खा}_{२} + \text{गा}_{२}\text{य}$$

इस लिये $- ४ = \text{गा}_{२} - \text{खा}_{२}$ और $- ३ = -\text{खा}_{२}$ $\therefore ३ = \text{खा}_{२}$ और

$$- ४ = \text{गा}_{२} - \text{खा}_{२} = \text{गा}_{२} - ३ \ \therefore - १ = \text{गा}_{२}$$

(३) इनका उत्थापन देकर समशोधन करने से

$$\text{य}^{२} - ३\text{य} - २ - (३\text{य} - १)\ (\text{य} + १)^{२}$$

$= (\text{खा}_1\text{य} + \text{गा}_1)\ (\text{य}^2 + \text{य} + १)\ (\text{य} + १) + (\text{य}^2 + \text{य} + १)\ \text{फी(य)}$

दोनों पक्षों में $\text{य}^2 + \text{य} + १$ का भाग देने से

$—(३\text{य} + १) = (\text{खा}_1\text{य} + \text{गा}_1)(\text{य} + १) + (\text{य}^2 + \text{य} + १)\text{फी(य)} \cdots\cdots (४)$

फिर इस में $\text{य}^2 + \text{य} + १ = ०$ मानने से

$—(३\text{य} + १) = (\text{खा}_1\text{य} + \text{गा}_1)(\text{य} + १) = (\text{खा}_1\text{य} + \text{गा}_1)\ (\text{य}^2 + \text{य} + १ + \text{य})$

$= (\text{खा}_1\text{य} + \text{गा}_1)\ \text{य} = —\text{खा}_1\ (\text{य} + १) + \text{गा}_1\text{य}$ ।

इस लिये $—३ = —\text{खा}_1 + \text{गा}_1$ और $—१ = —\text{खा}_1 \therefore १ = \text{खा}_1$ और

$—२ = \text{गा}_1$ अब (४) में इनका उत्थापन दे समशोधन कर $\text{य}^2 + \text{य} + १$ का भाग देने से $—(\text{य}—१) = \text{फी(य)}$

$$\text{इस लिये}\ \frac{\text{फी(य)}}{(\text{य}+१)^2} = —\frac{\text{य}—१}{(\text{य}+१)^2} = —\frac{\text{य}+१}{(\text{य}+१)^2} + \frac{२}{(\text{य}+१)^2}$$

$$= —\frac{१}{\text{य}+१} + \frac{२}{(\text{य}+१)^2}$$

तब

$$\int \frac{\text{य}^2—३\text{य}—२}{(\text{य}^2+\text{य}+१)^2(\text{य}+१)^2}\text{ताय} = \int \frac{३\text{य}—१}{(\text{य}^2+\text{य}+१)^2}\text{ताय}$$

$$+ \int \frac{\text{य}—२}{\text{य}^2+\text{य}+१}\text{ताय} + \int \frac{२\text{ताय}}{(\text{य}+१)^2} — \int \frac{\text{ताय}}{\text{य}+१}$$

यहाँ बारहवें प्रक्रम से सब का मान जान सकते हो पहले खण्ड का यदि मान व्यक्त हो तो। पहले का मान जानने के लिये पहले मानो कि

$\int \frac{\text{तार}}{(\text{र}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}}}$ इस का मान जानना है तो

$$\frac{\text{तार}}{(\text{र}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}}} = \frac{१}{\text{अ}^2}\cdot\frac{(\text{र}^2+\text{अ}^2—\text{र}^2)\text{तार}}{(\text{र}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}}} = \frac{१}{\text{अ}^2}\cdot\frac{\text{तार}}{(\text{र}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}-१}}$$

$$—\frac{१}{\text{अ}^2}\cdot\frac{\text{रतार}\cdot\text{र}}{(\text{र}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}}}$$

परन्तु खण्ड चलानयन से $\frac{१}{\text{अ}^2}\int\frac{२\text{रतार}\cdot\text{र}}{२(\text{र}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}}}$

$$= —\frac{१}{\text{अ}^2}\ \frac{१}{२(\text{न}—१)}\ \frac{\text{र}}{(\text{र}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}-१}} + \frac{१}{\text{अ}^2}\cdot\frac{१}{२(\text{न}—१)}\int\frac{\text{तार}}{(\text{र}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}-१}}$$

$$\text{इस लिये}\int\frac{\text{तार}}{(\text{र}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}}} = \frac{१}{\text{अ}^2}\ \frac{१}{२(\text{न}—१)}\ \frac{\text{र}}{(\text{र}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}-१}}$$

$$+\frac{१}{अ^२}\cdot\frac{२न-३}{२(न-१)}\int\frac{तार}{(र^२+अ^२)^{न-१}}\cdot \quad (अ)$$

इस (अ) सिद्धान्त को अच्छी तरह से सीखो।

ऊपर के उदाहरण में $\frac{३य-१}{(य^२+य+१)^२}=\frac{३(य-\frac{१}{३})}{(य^२+य+१)^२}$

$$=\frac{\frac{३}{२}(२य+१-१-\frac{२}{३})}{(य^२+य+१)^२}=\frac{\frac{३}{२}(२य+१)}{(य^२+य+१)^२}-\frac{५}{२}\frac{१}{(य^२+य+१)^२}$$

इस लिये $\int\frac{३य-१}{(य^२+य+१)^२}$ ताय

$$=\frac{३}{२}\int(२य+१)\,ताय\,(य^२+य+१)^{-२}-\frac{५}{२}\int\frac{ताय}{(य^२+य+१)^२}$$

$$=-\frac{३}{२}\frac{१}{य^२+य+१}-\frac{५}{२}\int\frac{ताय}{(य^२+य+१)^२}।$$

$$\frac{ताय}{(य^२+य+१)^२}=\frac{ताय}{\{(य+\frac{१}{२})^२+\frac{३}{४}\}^२}=\frac{तार}{(र^२+अ^२)^२}$$, यदि $र=य+\frac{१}{२}$

और $\frac{३}{४}=अ^२$

(अ) सिद्धान्त से

$$\int\frac{ताय}{(य^२+य+१)^२}=\int\frac{तार}{(र^२+अ^२)^२}=\frac{४}{३}\cdot\frac{१}{२}\cdot\frac{२य+१}{२(र^२+अ^२)}$$

$$+\frac{४}{३}\cdot\frac{१}{२}\int\frac{तार}{र^२+अ^२}$$

$$=\frac{१}{३}\cdot\frac{२य+१}{य^२+य+१}+\frac{२}{३}\int\frac{ताय}{य^२+य+१}=\frac{१}{३}\frac{२य+१}{य^२+य+१}+\frac{२}{३}\frac{२}{\sqrt{३}}स्प^{-१}\frac{२य+१}{\sqrt{३}}$$

और $\frac{य-२}{य^२+य+१}=\frac{\frac{१}{२}(२य-४)}{य^२+य+१}=\frac{\frac{१}{२}(२य+१-५)}{य^२+य+१}=\frac{\frac{१}{२}(य+१)}{य^२+य+१}-\frac{५}{२}\frac{१}{य^२+य+१}$

इसलिये

$$\int\frac{य-२}{य^२+य+१}ताय=\frac{१}{२}\int(२य+१)ताय\cdot(य^२+य+१)-\frac{५}{२}\int\frac{ताय}{य^२+य+१}$$

$$=\frac{१}{२}ला(य^२+य+१)-\frac{५}{२}\int\frac{तार}{र^२+अ^२}=\frac{१}{२}ला(य^२+य+१)-\frac{५}{२}\cdot\frac{२}{\sqrt{३}}स्प^{-१}\frac{२य+१}{\sqrt{३}}।$$

$२\int\frac{ताय}{(य+१)^२}=\frac{-२}{य+१}$। और $\int\frac{ताय}{य+१}=ला(य+१)$ इन सबको इकट्ठा करने से

$$\int \frac{३य—१}{(य^{२}+य+१)^{२}} ताय$$

$$= — \frac{३}{२(य^{२}+य+१)} — \frac{५}{६} \frac{२य+१}{य^{२}+य+१} — \frac{५}{३} \frac{२}{\sqrt{३}} स्प^{-१} \frac{२य+१}{\sqrt{३}}$$

$$\int \frac{य—२}{य^{२}+य+१} = \frac{१}{२}ला(य^{२}+य+१) — \frac{५}{२} \frac{२स्प^{-१}}{\sqrt{३}} \frac{२य+१}{\sqrt{३}}$$

$$\int \frac{२ताय}{(य+१)^{२}} = — \frac{२}{य+१}$$

$$\int \frac{ताय}{य+१} = ला(य+१)$$

इस लिये

$$\int \frac{३य—१}{(य^{२}+य+१)^{२}} ताय + \int \frac{य—२}{य^{२}+य+१} ताय + \int \frac{२ताय}{(य+१)^{२}} — \int \frac{ताय}{य+१}$$

$$= — \frac{३}{२(य^{२}+य+१)} — \frac{५}{६} \frac{२य+१}{य^{२}+य+१} — \frac{२५}{३} \frac{१}{\sqrt{३}} स्प^{-१} \frac{२य+१}{\sqrt{३}}$$

$$+ \frac{१}{२} ला(य^{२}+य+१) — \frac{२}{य+१} — ला(य+१) ।$$

$\int \frac{तार}{(र^{२}+अ^{२})^{न}}$ इस में यदि अ. स्पष = र तो $\frac{अ.ताप}{कोज्या^{२}प} =$ तार

और $(र^{२}+अ^{२}) = अ^{२}स्प^{२}ष + अ^{२} = अ^{२}(छे^{२}ष) = \frac{अ^{२}}{कोज्या^{२}प}$

इस लिये $\frac{तार}{(र^{२}+अ^{२})^{न}} = \int \frac{अ.ताप}{कोज्या^{२}प\left[\frac{अ^{२}}{कोज्या^{२}ष}\right]^{न}} = \int \frac{अ.ताष.कोज्या^{२न}प}{अ^{२न}कोज्या^{२}ष}$

$$= \frac{१}{अ^{२न-१}} \int ताषकोज्या^{२न-२}प$$

$$= \frac{ज्याष}{मअ^{२न-१}} \left\{ कोज्या^{म-१}ष + \frac{म-१}{म-२}कोज्या^{म-३}प + \frac{(म-१)(म-३)}{(म-२)(म-४)}कोज्या^{म-५}प + \ldots \right\}$$

$$+ \frac{(म—१)(म—३)(म—५)\ldots.१}{अ^{२न-१}म(म—२)(म—४)\ldots..२} ष$$

१२वें प्रक्रम के १५ वें उदाहरण की विधि से । यहाँ २न—२ = म ।

इस तरह से भी $\int \frac{तार}{(र^{२}+अ^{२})^{न}}$ इसका मान जान सकते हो ।

१९। ऊपर के प्रक्रमों से स्पष्ट है कि किसी अकरणीगत भिन्न सम्बन्ध के चलानयन के लिये जो खण्ड भिन्न किये गये हैं उनका चार प्रकार का रूप होता है

(१) $\dfrac{\text{आ}_१\text{ताय}}{\text{य}-\text{अ}_१}$, (२) $\dfrac{\text{का}_१\text{ताय}}{(\text{य}-\text{क}_१)^{\text{त}}}$,

(३) $\dfrac{(\text{खाय}+\text{गा})\text{ताय}}{\text{य}^२-२\text{अ}_२\text{य}+\text{अ}_२^२+\text{क}_२^२} = \dfrac{\text{खाय}+\text{गा}}{(\text{य}-\text{अ}_२)^२+\text{क}_२^२}\text{ताय}$

(४) $\dfrac{\text{च}_१\text{य}+\text{ज}_१}{\{(\text{य}-\text{ग}_१)^२+\text{घ}_१^२\}^{\text{थ}}}$ ताय इन में (१), (२), (३) का चलानयन तो पहले कर आये हैं रहा चौथा उसको यदि

$$\frac{\text{च}_१\text{य}+\text{ज}_१}{\{(\text{य}-\text{ग}_१)^२+\text{घ}_१^२\}^{\text{थ}}}\text{ताय} = \frac{\text{च}_१\text{य}-\text{च}_१\text{ग}_१+\text{च}_१\text{ग}_१+\text{ज}_१}{\{(\text{य}-\text{ग}_१)^२+\text{घ}_१^२\}^{\text{थ}}}\text{ताय}$$

$$= \frac{\text{च}_१(\text{य}-\text{ग}_१)\text{ताय}}{\{(\text{य}-\text{ग}_१)^२+\text{घ}_१^२\}^{\text{थ}}} + \frac{\text{च}_१\text{ग}_१+\text{ज}_१}{\{(\text{य}-\text{ग}_१)^२+\text{घ}_१^२\}^{\text{थ}}}\text{ताय}$$

यहां पहले खण्ड का चल पिछले प्रक्रमों से स्पष्ट है कि

$$\frac{-\text{च}_१}{२(\text{थ}-१)\{(\text{य}-\text{ग}_१)^२+\text{घ}_१^२\}^{\text{थ}-१}} \text{ यह है}$$

दूसरे खण्ड में यदि $\text{य}-\text{ग}_१=\text{र}$ तो

$\dfrac{\text{च}_१\text{ग}_१+\text{ज}_१}{\{(\text{य}-\text{ग}_१)^२+\text{घ}_१^२\}^{\text{थ}}}\text{ताय} = \dfrac{\text{स्थितार}}{(\text{र}^२+\text{घ}_१^२)^{\text{थ}}}$। इसका मान १८वें प्रक्रम के (अ) सिद्धान्त से स्पष्ट है, यहाँ $\text{च}_१\text{ग}_१+\text{ज}_१=\text{स्थि}$।

अब इन चारों भेदों के चल से अकरणीगत भिन्न सम्बन्ध का चलानयन कर सकते हो।

२०। ऊपर के प्रकारों के बल से अनेक चलानयन कर सकते हो। जैसे यदि $\int\dfrac{\text{फ}(\text{य}^२)\text{ताय}}{\text{फा}(\text{य}^२)}$ इस का मान जानना हो तो यदि $\text{र}=\text{य}^२$ तो $\text{तार}=२\text{यताय}$

इस लिये $\text{ताय}=\dfrac{\text{तार}}{२\text{य}}$ और $\int\dfrac{\text{फ}(\text{य}^२)}{\text{फा}(\text{य}^२)}=\dfrac{\text{फ}(\text{र})}{\text{फा}(\text{र})}$ अब यहाँ यदि र के मान सब सम्भव और परस्पर भिन्न हों तो खण्ड भिन्न का कोई मान

$\dfrac{\text{फ}(\text{अ}_१)}{\text{फा}'(\text{अ}_१)}\cdot\dfrac{१}{\text{र}-\text{अ}_१}=\dfrac{\text{फ}(\text{अ}_१)}{\text{फा}'(\text{अ}_१)}\;\dfrac{१}{\text{य}^२-\text{अ}_१}$ ऐसा होगा जहाँ $\text{अ}_१$, र का कोई मान है।

इस पर से $\int\dfrac{\text{फ}(\text{अ}_१)}{\text{फा}'(\text{अ}_१)}\;\dfrac{\text{ताय}}{\text{य}^२-\text{अ}_१}=\dfrac{\text{फ}(\text{अ}_१)}{\text{फा}'(\text{अ}_१)}\int\dfrac{\text{ताय}}{\text{य}^२-\text{अ}_१}$

यहां चाहे $अ_1$ धनात्मक वा ऋणात्मक हो १२वें प्रक्रम से $\int \frac{ताय}{य - अ_1}$ का मान जान सकते हो।

यदि र के मान में एक जोड़ा असम्भाव्य राशि हो जिनका मान $अ + क\sqrt{-१}$ और $अ - क\sqrt{-१}$ हो तो इनके वश से खण्ड भिन्न संबंध का मान

$= \frac{(खाय^2 + गा)ताय}{(य^2 - अ)^2 + क^2} = \frac{(खाय^2 + गा)ताय}{य^4 - २अय^2 + ग^2}$, जहां $ग^2 = अ^2 + क^2$। यहां यदि

$अ = गकोज्या२इ$ तो इस भिन्न का रूप $= \frac{(खाय^2 + गा)ताय}{य^4 - २गय^2 कोज्या२इ + ग^2}$

$$= \frac{(खाय^2 + गा)ताय}{(य^2 - २य\sqrt{ग}\, कोज्याइ + ग)(य^2 + २य\sqrt{ग}\, कोज्याइ + ग)}$$

इस लिये पूर्ववत् कल्पना करो कि

$$\frac{खाय^2 + गा}{य^4 - २य^2 गकोज्या२इ + ग^2} = \frac{खा_1 य + गा_1}{य^2 - २य\sqrt{ग}\, कोज्याइ + ग}$$

$+ \frac{खा_2 य + गा_2}{य^2 + २य\sqrt{ग}\, कोज्याइ + ग}$ इस पर से पूर्ववत् स्पष्ट है कि

$खा_1 = - खा_2 = \frac{खाग - गा}{८ग^{\frac{3}{2}} कोज्याइ}$, $गा_1 = गा_2 = \frac{गा}{२ग}$ इनका उत्थापन ऊपर के खण्ड भिन्नों में देने से और थोड़ा सा परिवर्त्तन करने से

$$\int \frac{(खाय^2 + गा)ताय}{य^4 - २अय^2 + ग^2} = \frac{खाग - गा}{८ग^{\frac{3}{2}} कोज्याइ} ला \left[\frac{य^2 - २य\sqrt{ग}\, कोज्याइ + ग}{य^2 + २य\sqrt{ग}\, कोज्याइ + ग}\right]$$

$$+ \frac{खाग + गा}{४ग^{\frac{3}{2}} ज्याइ} स्प^{-1} \left[\frac{२य\sqrt{ग}\, ज्याइ}{ग^2 - य^2}\right]$$

२१। यदि $\frac{ताय}{(य - अ)^म (य - क)^न}$ इस का चल जानना हो तो इसे खण्ड भिन्नों के रूप में न ला कर भी नीचे की युक्ति से सहज में चल मान जान सकते हो।

कल्पना करो कि $य - अ = (य - क)र$ तो $य = \frac{अ - कर}{१ - र}$

$\therefore य - अ = \frac{(अ - क)र}{१ - र}$, $य - क = \frac{अ - क}{१ - र}$ और $ताय = \frac{(अ - क)तार}{(१ - र)^2}$ ऊपर के मान

में इनका उत्थापन देने से $\int \frac{\text{ताय}}{(\text{य}-\text{अ})^{\text{म}}(\text{य}-\text{क})^{\text{न}}} = \int \frac{(१-\text{र})^{\text{म}+\text{न}-२}}{\text{र}^{\text{म}}(\text{अ}-\text{क})^{\text{म}+\text{न}-१}}$ तार

इस का मान अब द्वियुक्पदसिद्धान्त से सहज में जान सकते हो ।

जैसे $\int \frac{\text{ताय}}{(\text{य}-\text{अ})(\text{य}-\text{क})^{३}}$ यहाँ म = १ । न = ३, म + न−२ = २ । म + न−१ = ३

इस लिये $\int \frac{\text{ताय}}{(\text{य}-\text{अ})(\text{य}-\text{क})^{३}} = \int \frac{(१-\text{र})^{\text{म}+\text{न}-२}}{\text{र}^{\text{म}}(\text{अ}-\text{क})^{\text{म}+\text{न}-१}}\text{तार} = \int \frac{(१-\text{र})^{२}}{\text{र}(\text{अ}-\text{क})^{३}}\text{तार}$

$= \int \frac{१-२\text{र}+\text{र}^{२}}{\text{र}(\text{अ}-\text{क})^{३}}\ \text{तार} = \frac{१}{(\text{अ}-\text{क})^{३}}\left\{\text{लार}-२\text{र}+\frac{\text{र}^{२}}{२}\right\}$ इस में र के स्थान में

$\frac{\text{य}-\text{अ}}{\text{य}-\text{क}}$ का उत्थापन देने से य के रूप में ऊपर का चल सिद्ध हो जायगा ।

यहाँ यदि अ = क तो ऊपर के सिद्धान्त का व्यभिचार होगा ।

२२ । $\frac{\text{य}^{२\text{म}+१}\text{ताय}}{(\text{अ}+\text{गय}^{२})^{\text{न}}}$ इस के चलानयन के लिये जहाँ म और न अभिन्न

संख्या हैं और $\text{य}^{२} = \frac{\text{र}-\text{अ}}{\text{ग}}$

मानो कि $\text{अ}+\text{गय}^{२} = \text{र}$ तो तार = २गयताय ∴ ताय = $\frac{\text{तार}}{२\ \text{गय}}$ ।

इन का उत्थापन देने से

$$\frac{\text{य}^{२\text{म}+१}\text{ताय}}{(\text{अ}+\text{गय}^{२})^{\text{न}}} = \frac{\text{य}^{२\text{म}}\times\text{यताय}}{\text{र}^{\text{न}}} = \frac{\text{य}^{२\text{म}}\cdot\text{तार}}{२\text{गर}^{\text{न}}} = \frac{(\text{य}^{२})^{\text{म}}\text{तार}}{२\text{गर}^{\text{न}}}$$

$= \frac{(\text{र}-\text{अ})^{\text{म}}\text{तार}}{२\text{ग}^{\text{म}+१}\text{र}^{\text{न}}}$ यह ऐसे रूप में आ गया जिसका चल द्वियुक्पद-सिद्धान्त से ला सकते हो ।

ऊपर की युक्ति से स्पष्ट है कि $\frac{\text{फ}(\text{य}^{२})\ \text{यताय}}{(\text{अ}+\text{गय}^{२})^{\text{न}}}$ इस का चलानयन भी अत्यन्त सुगम है यदि फ(य²) में य² का कोई अभिन्न ही घात हो तो ।

२३ । $\frac{\text{ताय}}{\text{य}^{\text{न}}-१}$ इस के चलानयन के लिये जहाँ न धन और अभिन्न है

मानो कि $\text{य}^{\text{न}}-१ = ०$ इस समीकरण से य का एक असम्भव मान $\text{अ}_{२}$ है तो दूसरा असम्भव मान $\text{अ}_{२}^{-१}$ यह होगा यहाँ

$$\text{अ}_{२} = \text{कोज्या}\frac{२\text{त}\pi}{\text{न}} + \text{ज्या}\ \frac{२\text{त}\pi}{\text{न}}\sqrt{-१}\ \text{है}$$

(चलनकलन का ८८वाँ प्रक्रम देखो वा डेमाइवर का सिद्धान्त) जहाँ त का मान १, २, ३ इत्यादि धन संख्या है ।

यहाँ १४वें प्रक्रम से $य^{न}—१$ इस के एक खण्ड भिन्न का मान जब

$$य = अ_{१} \quad तो \frac{१}{नअ_{१}^{न-१}} \cdot \frac{१}{(य—अ_{१})} = \frac{अ_{१}}{नअ_{१}^{न}(य—अ_{१})}$$

$= \frac{अ_{१}}{न(य—अ_{१})}$ यह होगा और दूसरे का $\frac{अ_{१}^{-१}}{न(य—अ_{१}^{-१})}$ यह

जहाँ $य = अ_{१}^{-१}$ इन दोनों खण्डभिन्नों का योग करने से

$$योग = \frac{१}{न}\left[\frac{अ_{१}}{य—अ_{१}} + \frac{अ_{१}^{-१}}{य—अ_{१}^{-१}}\right]$$

$$= \frac{१}{न}\left\{\frac{(अ_{१}+अ_{१}^{-१})य—२}{य^{२}—(अ_{१}+अ_{१}^{-१})य+१}\right\} \text{ऐसा हुआ ।}$$

इस में $अ_{१}+अ_{१}^{-१} =$ के स्थान में २कोज्या $\frac{२त\pi}{न}$ का उत्थापन देने से

और $\frac{२त\pi}{न} = ष$ मानने से योग $= \frac{२}{न} \cdot \frac{यकोज्याष—१}{य^{२}—२यकोज्याष+१}$ ऐसा होगा

जिस का चल १२वें प्रक्रम के १०वें उदाहरण से

$$\frac{कोज्याष}{न} ला\ (१—२यकोज्याष+य^{२})$$

$$— \frac{२ज्याष}{न} स्प^{-१}\left[\frac{य—कोज्याष}{ज्याष}\right] \text{ऐसा होगा ।}$$

यहाँ न के सम और विषम के वश से दो भेद होंगे ।

(१) मानो कि न = २म । इस स्थिति में $य^{न}—१ = य^{२म}—१ = ०$ इस में य के दो मान +१, —१ ये सम्भव होंगे, इस लिये

$$\int \frac{ताय}{य^{२म}—१} = \frac{१}{२म} ला \frac{य—१}{य+१}$$

$$+ \frac{१}{२म} \text{ से गुणित } कोज्या\frac{त\pi}{म} ला\ (१—२य\ कोज्या\frac{त\pi}{म}+य^{२})$$

इनके मान जो त के स्थान में १ से ले म—१ तक उत्थापन देने से हों और उस में

$$— \frac{१}{म} \text{ से गुणित } ज्या\frac{त\pi}{म} स्प^{-१}\left[\frac{य—कोज्या\frac{त\pi}{म}}{ज्या\frac{त\pi}{म}}\right] \text{ इन के मान}$$

जो त के स्थान में १ से ले म—१ तक उत्थापन देने से हों।

यहाँ त के स्थान में १, २, · · म—१ इन का उत्थापन देने से जो मान हों उन का योग क्रम से यौ कोज्या$\frac{त\pi}{म}$ला (१—२ य कोज्या$\frac{त\pi}{म}$ + य^{२}) और

यौ ज्या $\frac{त\pi}{म}$स्प$^{-१}$ $\left[\frac{य—कोज्या\frac{त\pi}{म}}{ज्या\frac{त\pi}{म}}\right]$ मानो तो ऊपर का समीकरण

$$\int \frac{ताय}{य^{२म}—१} = \frac{१}{२म} ला \frac{य—१}{य+१}$$

$$+\frac{१}{२म} यौ कोज्या\frac{त\pi}{म} ला\ (१—२य\ कोज्या\frac{त\pi}{म} + य^{२})$$

$$— \frac{१}{म}\ यौ\ ज्या\ \frac{त\pi}{म}\ स्प^{-१} \left[\frac{य—कोज्या\frac{त\pi}{म}}{ज्या\ \frac{त\pi}{म}}\right] \cdots\cdots \quad (१)$$

(२) कल्पना करो कि न = २ म + १ तो

$$\int \frac{ताय}{य^{२म+१}—१} = \frac{ला(य—१)}{२म+१}$$

$$+ \frac{१}{२म+१}\ यौ\ कोज्या\ \frac{२त\pi}{२म+१}\ ला(१—२यकोज्या\ \frac{२त\pi}{२म+१} + य२)$$

$$— \frac{२}{२म+१} यौज्या\frac{२त\pi}{२म+१} स्प^{-१} \left[\frac{य—कोज्या\ \frac{२त\pi}{२म+१}}{ज्या\ \frac{२त\pi}{२म+१}}\right]$$

यहाँ यौ का मान त के स्थान में १, २, ३ · · · · म का उत्थापन देने से जानो।

२४। $\int \frac{य^{म-१}ताय}{य^{न}—१}$ इस का मान जानना हो जहाँ म, न से छोटा है तो यहाँ भी पहले के ऐसी क्रिया करने से एक खण्ड भिन्न का मान

$\frac{अ_{१}^{म-१}}{न\ अ_{१}^{न-१}\ (य—अ_{१})} = \frac{अ_{१}^{म}}{न(य—अ_{१})}$ यह

और दूसरा $\frac{अ_{१}^{-म}}{न(य—अ_{१}^{-१})}$ यह होगा यहाँ भी $अ_{१}$, $अ_{१}^{-१}$ दोनों य के

कोई एक जोड़ा असम्भव मान हैं। इस लिये दोनों खण्ड भिन्नों का

योग करने से $\frac{१}{न}\left[\frac{अ_{१}^{म}}{य—अ_{१}} + \frac{अ_{१}^{-म}}{य—अ_{१}^{-१}}\right]$

$$= \frac{१}{न}\ \frac{य(अ_{१}^{म} + अ_{१}^{-म})—(अ_{१}^{म-१} + अ_{१}^{-(म-१)})}{य^{२}—य(अ_{१} + अ_{१}^{-१}) + १}$$

$$= \frac{२}{न} \cdot \frac{यकोज्यामप — कोज्या (म — १) प}{य^२ — २यकोज्याप + १}$$ यह हुआ ।

जहाँ $प = \frac{२त\pi}{न}$ । यहाँ त्रिकोणमिति से यदि कोज्या (म—१)प का मान कोज्यामप· कोज्याप + ज्यामप· ज्याप इस रूप में ले आवो तो वही मान

$$\frac{२}{न} \cdot \frac{यकोज्यामप — कोज्यामपकोज्याप — ज्यामपज्याप}{य^२ — २यकोज्याप + १}$$

$$= \frac{१}{न} \left\{ \frac{(२य — २कोज्याप)कोज्यामप}{य^२ — २ यकोज्याप + १} — २ज्यामप \frac{ज्याप}{(य — कोज्याप)^२ + ज्या^२प} \right\}$$

ऐसा हुआ इस लिये १२वें प्रक्रम से

$$\int \frac{य^{म-१}ताय}{य^न — १} = \frac{१}{न} यौ कोज्यामप·ला(य^२ — २यकोज्याप + १)$$

$$— \frac{२}{न} यौज्यामप स्प^{-१} \left\{ \frac{य — कोज्याप}{ज्याप} \right\} + \frac{१}{न} ला (य-१) + \frac{(-१)^म}{न} ला(य + १)$$

यदि न सम हो जहाँ यौ का मान त के स्थान में १ से ले $\frac{न}{२}$ —१ तक का उत्थापन देने से है ।

$\int \frac{य^{म-१}ताय}{य^न — १}$ इस के मान में असम्भव के वश से जो खण्ड चल हैं उन को पहले दो खण्डों में लिखा है और सम्भव के दो चल अन्त में हैं क्यों कि न का मान सम होने से $य^न — १ = ०$ इस में य का एक मान + १ दूसरा —१ दो सम्भव आते हैं और भिन्न का मान

$$= \frac{१}{न(य-१)} + \frac{(-१)^म}{न(य+१)} + \frac{२}{न} यौ \frac{कोज्यामप(य — कोज्याप) — ज्यामपज्याप}{य^२ — २यकोज्याप + १}$$

और यदि न विषम हो तो $य^न — १ = ०$ इस में य का एक ही सम्भाव्य मान + १ होगा, इस लिये भिन्न का मान

$$= \frac{१}{न} \cdot \frac{१}{य — १} + \frac{२}{न} यौ \frac{कोज्यामप(य — कोज्याप) — ज्यामपज्याप}{य^२ — २यकोज्याप + १}$$ यह होगा

तब पहले के ऐसा

$$\int \frac{य^{म-१}ताय}{य^न — १} = \frac{१}{न} ला (य-१) + \frac{१}{न} यौकोज्यामपला(य^२ - २यकोज्याप + १)$$

$$— \frac{२}{न} यौज्यामप स्प^{-१} \left[\frac{य — कोज्याप}{ज्याप} \right]$$ यहाँ त के स्थान में

१, से $\frac{न-१}{२}$ तक का उत्थापन देने से यौ का मान जानना।

२५। $\int \frac{य^{म-१}ताय}{य^{न}+१}$ इस का मान जानना हो जहाँ म न से छोटा है तो यदि न सम हो तो $य^{न}+१=०$ इस में य का कोई सम्भव मान न आवेगा इस लिये एक सम्भव मान यदि $अ_{२}$

$= कोज्या \frac{\pi}{न} + ज्या \frac{\pi}{न}\sqrt{-१}$ और दूसरा $अ_{२}^{-१} = \frac{१}{कोज्या \frac{\pi}{न} + ज्या \frac{\pi}{न}\sqrt{-१}}$

$= कोज्या \frac{\pi}{न} - ज्या \frac{\pi}{न}\sqrt{-१}$ मानो तो एक खण्ड भिन्न का मान

$\frac{अ_{२}^{म-१}}{अ_{२}^{न-१}न(य-अ_{२})} = -\frac{अ_{२}^{म}}{न(य-अ_{२})}$ यह और दूसरा $-\frac{अ_{२}^{-म}}{न(य-अ_{२}^{-१})}$

यह हुआ इस लिये कोई दो मानों का योग

$= -\frac{२}{न}\frac{कोज्यामप(य-कोज्याप)-ज्यामपज्याप}{य^{२}-२यकोज्याप+१}$ जहाँ $प=\frac{त\pi}{न}$

तब पूर्वप्रकार के ऐसा।

$$\int \frac{य^{म-१}ताय}{य^{न}+१} = -\frac{१}{न} यौकोज्यामपला\ (य^{२}-२यकोज्याप+१)$$

$$+\frac{१}{न} यौज्यामप\ स्प^{-१}\frac{य-कोज्याप}{ज्याप}$$ जहाँ त के स्थान में १, ३, ५, ७ · · · न—१ का उत्थापन दे कर यौ का मान जानना होगा।

और यदि न विषम हो तो $य^{न}+१=०$ इस में य का एक मान —१ यह सम्भाव्य होगा इस लिये

$$\int \frac{य^{म-१}ताय}{य^{न}+१} = \frac{(-१)^{म-१}}{न} ला(य+१)$$

$$-\frac{१}{न}यौकोज्यामपला(य^{२}-२यकोज्याप+१)+\frac{२}{न}यौज्यामप\ स्प^{-१}\frac{य-कोज्याप}{ज्याप}$$

यह होगा जहाँ न के स्थान में १, ३, ५ · · · न—२ का उत्थान देकर यौ का मान जानना है।

२६। $\frac{फ(य)}{य^{न}-१}$ इस का मान खण्ड भिन्न में जानना हो जहाँ $फ(य) = ग_{०}+ग_{१}य+ग_{२}य^{२}+\cdots+ग_{म-१}य^{म-१}$ जहाँ न से म छोटा है वा समान।

तो न के सम मान में $य^{न}-१=०$ इस में य $=+१, -१$ ये दो

मान सम्भाव्य हैं और असम्भव मान में कोई एक जोड़े का मान $अ_२$, $अ_२^{-१}$ मानो तो इन दोनों से उत्पन्न खण्ड भिन्न क्रम से

$\frac{अ_२फ(अ_२)}{न(य—अ_२)}$, और $\frac{अ_२^{-१}फ(अ_२^{-१})}{न(य—अ_२^{-१})}$ होंगे, इन दोनों का योग

$$= \frac{१}{न} \frac{\{ अ_२फ(अ_२) + अ_२^{-१}फ(अ_२^{-१}) \} य — \{ फ(अ_२) + फ(अ_२^{-१}) \}}{य^२ — (अ_२ + अ_२^{-१})य + १}$$

परन्तु $अ_२ = कोज्या \frac{२त\pi}{न} + ज्या\frac{२त\pi}{न}\sqrt{—१}$

$$अ_२^{-१} = कोज्या \frac{२त\pi}{न} — ज्या \frac{२त\pi}{न}\sqrt{—१}$$

$$फ(अ_२) = ग_० + ग_१ अ_२ + ग_२ अ_२^२ + ग_३ अ_२^३ + \cdots$$

$$अ_२फ(अ_२) = ग_० अ_२ + ग_१ अ_२^२ + ग_२अ_२^३ + ग_३ अ_२^४ + \cdots$$

$$अ_२^{-१}फ(अ_२^{-१}) = ग_० अ_२^{-१} + ग_१ अ_२^{-२} + ग_२ अ_२^{-३} + ग_३ अ_२^{-४} + \cdots$$

इस लिये $अ_२फ(अ_२) + अ_२^{-१}फ(अ_२^{-१})$

$$= २ग_०कोज्याप + २ग_१कोज्या२प + \cdots + २ग_{म-१}कोज्यामप$$

और $फ(अ_२) + फ(अ_२^{-१}) = २ग_० + ग_१कोज्याप + ग_२कोज्या२प + \cdots$

$$+ २ग_{म-१}कोज्या (म—१)प$$

$$तब \frac{फ(य)}{य^न—१} = \frac{फ(—१)}{न} \frac{(—१)^{न-१}}{य+१} + \frac{फ(१)}{न} \frac{१}{य—१}$$

$$+ \frac{\frac{२}{न} यौ(ग_०कोज्याप + \cdots + ग_{म-१}कोज्यामप)य}{य^२—२यकोज्याप + १}$$

$$— \frac{यौ \{ ग_० + ग_१कोज्याप + \cdots + ग_{म-१}कोज्या(म—१)प \}}{य^२—२यकोज्याप + १}$$

यहाँ त के स्थान में १, २, $\cdots \frac{न—२}{२}$ का उत्थापन देकर यौ का मान जानना। यदि न विषम हो तो $य^न—१ = ०$ इस में य का एक ही + १मान सम्भाव्य होगा इस लिये ऊपर के मान में पहला खण्ड छोड़ देना चाहिये और त के स्थान में १, २, $\cdots \frac{न—१}{२}$ का उत्थापन देकर यौ का मान ले आना चाहिये।

२७। इसी प्रकार यदि $\frac{फ(य)}{य^न + १}$ इस का रूप खण्ड भिन्नों में लाना हो तो ऊपर की युक्ति से ला सकते हो विशेष इतना ही है कि $अ_२$ का मान $कोज्या\frac{त\pi}{न} + ज्या\frac{त\pi}{न}\sqrt{—१}$ यह कल्पना करना चाहिये जहाँ त के स्थान में १, ३, $\cdots$ ५, न— १ इत्यादि का उत्थापन देना चाहिये यदि न सम हो और यदि न विषम हो तो १. ३. ५. $\cdots$ न— २ का।

२८ । इस प्रक्रम में क्रिया समेत कुछ उदाहरणों को दिखा कर इस अध्याय को समाप्त करते हैं ।

(१) उदा० $\int \frac{\text{य}^{५}\text{ताय}}{(\text{अ}^{२}-\text{य}^{२})^{२}}$ इस का क्या मान है ।

यहाँ २२वें प्रक्रम से ५ = २म + १ $\therefore$ म = २ । न = २ । ग = —१ और अ के स्थान में अ^{२} और (अ^{२}—य^{२}) के स्थान में र का उत्थापन देने से ।

$$\int \frac{\text{य}^{५}\text{ताय}}{(\text{अ}^{२}-\text{य}^{२})^{२}} = \int \frac{(\text{र}-\text{अ})^{\text{म}}\text{तार}}{\text{२ग}^{\text{म}+१}\text{र}^{\text{न}}} = \int \frac{(\text{र}-\text{अ})^{२}}{\text{२ग}^{३}\cdot\text{र}^{२}}\,\text{तार}$$

$$= \int \frac{\text{र}^{२}-\text{२रअ}+\text{अ}^{२}}{\text{२ग}^{३}\,\text{र}^{२}}\,\text{तार} = \frac{१}{\text{२ग}^{३}}\int \text{तार} - \text{२अ}\int\frac{\text{तार}}{\text{र}} + \text{अ}^{२}\int \text{तार}\,\text{र}^{-२}$$

$$= \frac{१}{\text{२ग}^{३}}\left[\text{र}-\text{२अलार}-\frac{\text{अ}^{२}}{\text{र}}\right]$$

$$= -\tfrac{१}{२}\left[\text{अ}^{२}-\text{य}^{२}-\text{२अ}^{२}\text{ला}(\text{अ}^{२}-\text{य}^{२})-\frac{\text{अ}^{४}}{\text{अ}^{२}-\text{य}^{२}}\right]$$

$$= \frac{\text{अ}^{४}}{२(\text{अ}^{२}-\text{य}^{२})} + \frac{\text{य}^{२}}{२} + \text{अ}^{२}\text{ला}(\text{अ}^{२}-\text{य}^{२})$$ । स्थिराङ्क $\frac{\text{अ}^{२}}{२}$ को छोड़ देने से

यही उत्तर हुआ ।

(२) उदा० $\int \frac{\text{ताय}}{\text{य}^{४}-१}$ इस का क्या मान है ।

यहाँ २३वें प्रक्रम के प्रथम समीकरण से

न = ४ । म = २ और त के स्थान में १ का उत्थापन देने से

$$\int \frac{\text{ताय}}{\text{य}^{२\text{म}}-१} = \frac{१}{\text{२म}}\,\text{ला}\,\frac{\text{य}-१}{\text{य}+१}$$
$$+ \frac{१}{\text{२म}}\,\text{यौकोज्या}\frac{\text{त}\pi}{\text{म}}\;\text{ला}\left(\text{य}^{२}-\text{२यकोज्या}\frac{\text{त}\pi}{\text{म}}+१\right)$$
$$-\frac{१}{\text{म}}\,\text{यौज्या}\frac{\text{त}\pi}{\text{म}}\;\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य}-\text{कोज्या}\frac{\text{त}\pi}{\text{म}}}{\text{ज्या}\frac{\text{त}\pi}{\text{म}}}\right]$$

$$= \tfrac{१}{४}\,\text{ला}\,\frac{\text{य}-१}{\text{य}+१} + \tfrac{१}{४}\,\text{कोज्या}\,\tfrac{\pi}{२}\,\text{ला}\left(\text{य}^{२}-\text{२कोज्या}\,\tfrac{\pi}{२}+१\right)$$
$$-\tfrac{१}{२}\,\text{ज्या}\,\tfrac{\pi}{२}\,\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य}-\text{कोज्या}\frac{\pi}{२}}{\text{ज्या}\frac{\pi}{२}}\right]$$

$$= \tfrac{१}{४}\,\text{ला}\,\frac{\text{य}-१}{\text{य}+१} - \tfrac{१}{२}\,\text{स्प}^{-१}\,\text{य} = \int\frac{\text{ताय}}{\text{य}^{४}-१}$$ यही उत्तर हुआ ।

(३) उदा० $\int \frac{\text{ताय}}{\text{य}^{६}—१}$ इस का क्या मान है।

यहाँ भी २३वें प्रक्रम से न = ६। म = ३ और त के स्थान में १, २, का उत्थापन देने से क्योंकि २ = म — १

$\text{यौकोज्या}\frac{\text{त}\pi}{\text{म}}\text{ला}\left(\text{य}^{२}—\text{२यकोज्या}\frac{\text{त}\pi}{\text{म}}+१\right)$

$=\text{कोज्या}\frac{\pi}{3}\text{ला}\left(\text{य}^{२}—\text{२यकोज्या}\frac{\pi}{3}+१\right)$

$+\text{कोज्या}\frac{२\pi}{3}\text{ला}\left(\text{य}^{२}—\text{२यकोज्या}\frac{२\pi}{3}+१\right)$

$=\frac{१}{२}\text{ला}\left(\text{य}^{२}—\text{य}+१\right)—\frac{१}{२}\text{ला}\left(\text{य}^{२}+\text{य}+१\right)$

और $\text{यौज्या}\frac{\text{त}\pi}{\text{म}}\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य}—\text{कोज्या}\frac{\text{त}\pi}{\text{म}}}{\text{ज्या}\frac{\text{त}\pi}{\text{म}}}\right]$

$=\text{ज्या}\frac{\pi}{3}\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य}—\text{कोज्या}\frac{\pi}{3}}{\text{ज्या}\frac{\pi}{3}}\right]+\text{ज्या}\frac{२\pi}{3}\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य}—\text{कोज्या}\frac{२\pi}{3}}{\text{ज्या}\frac{२\pi}{3}}\right]$

$=\frac{\sqrt{३}}{२}\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{२य}—१}{\sqrt{३}}\right]+\frac{\sqrt{३}}{२}\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{२य}+१}{\sqrt{३}}\right]$

इन सब का (१) में उत्थापन देने से

$$\int\frac{\text{ताय}}{\text{य}^{६}—१}=\frac{१}{६}\text{ला}\frac{\text{य}—१}{\text{य}+१}+\frac{१}{६}\left\{\text{ला}(\text{य}^{२}—\text{य}+१)—\text{ला}(\text{य}^{२}+\text{य}+१)\right\}$$

$$—\frac{१}{२\sqrt{३}}\left\{\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{२य}—१}{\sqrt{३}}\right]+\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{२य}+१}{\sqrt{३}}\right]\right\}$$ यही उत्तर हुआ।

(४) उदा० $\int\frac{\text{ताय}}{\text{य}^{३}—१}$ इस का क्या मान है।

यहाँ २३वें प्रक्रम के (२) समीकरण से न = ३। म = १ और त = १। तब

$$\int\frac{\text{ताय}}{\text{य}^{\text{२म}+१}—१}=\frac{\text{ला}(\text{य}—१)}{\text{२म}+१}$$

$$+\frac{१}{\text{२म}+१}\text{यौकोज्या}\frac{\text{२त}\pi}{\text{२म}+१}\text{ला}\left(१—\text{२कोज्या}\frac{\text{२त}\pi}{\text{२म}+१}+\text{य}^{२}\right)$$

$$—\frac{२}{\text{२म}+१}\text{यौज्या}\frac{\text{२त}\pi}{\text{२म}+१}\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य}—\text{कोज्या}\frac{\text{२त}\pi}{\text{२म}+१}}{\text{ज्या}\frac{\text{२त}\pi}{\text{२म}+१}}\right]$$

$$=\frac{\text{ला}(\text{य}—१)}{३}+\frac{१}{३}\text{कोज्या}\frac{२\pi}{3}\text{ला}\left(१-\text{२यकोज्या}\frac{२\pi}{3}+\text{य}^{२}\right)$$

$$—\frac{२}{३}\text{ज्या}\frac{२\pi}{3}\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य}-\text{कोज्या}\frac{२\pi}{3}}{\text{ज्या}\frac{२\pi}{3}}\right]$$

$$= \frac{1}{3} \text{ला}(\text{य}-१) - \frac{1}{6}\text{ला}(१+\text{य}+\text{य}^२) - \frac{१}{\sqrt{३}}\text{स्प}^{-१}\left[\frac{२\text{य}+१}{\sqrt{३}}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\text{ला}\frac{(\text{य}-१)^२}{\text{य}^२+\text{य}+१} - \frac{१}{\sqrt{३}}\text{स्प}^{-१}\left[\frac{२\text{य}+१}{\sqrt{३}}\right)$$

(५) उदा० $\int \frac{\text{य}^४\text{ताय}}{\text{य}^६-१}$ इसका मान क्या होगा।

यहाँ २४वें प्रक्रम से म = ५। न = ६ त = १, २। $\text{ष} = \frac{२\text{त}\pi}{\text{न}} = \frac{२\pi}{६}, \frac{४\pi}{६}$, तब

$$\int \frac{\text{य}^{\text{म}-१}\text{ताय}}{\text{य}^{\text{न}}-१} = \frac{\text{ला}(\text{य}-१)}{\text{न}} + \frac{(-१)^{\text{म}}}{\text{न}}\text{ला}(\text{य}+१)$$

$$+ \frac{1}{\text{न}}\text{यौकोज्यामपला}(\text{य}^२-२\text{यकोज्याष}+१)$$

$$- \frac{२}{\text{न}}\text{यौज्यामष स्प}^{-१}\left\{\frac{\text{य}-\text{कोज्याष}}{\text{ज्याष}}\right\}$$

$$= \frac{\text{ला}(\text{य}-१)}{६} - \frac{\text{ला}(\text{य}+१)}{६} + \frac{1}{6}\left\{\text{कोज्या}\frac{५\times२\pi}{६}\text{ला}(\text{य}^२-२\text{यकोज्या}\frac{२\pi}{६}+१)\right\}$$

$$+ \frac{1}{6}\left\{\text{कोज्या}\frac{५\times४\pi}{६}\text{ला}(\text{य}^२-२\text{यकोज्या}\frac{४\pi}{६}+१)\right\}$$

$$- \frac{1}{3}\left\{\text{ज्या}\frac{५\times२\pi}{६}\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य}-\text{कोज्या}\frac{२\pi}{६}}{\text{ज्या}\frac{२\pi}{६}}\right]\right\}$$

$$- \frac{1}{3}\left\{\text{ज्या}\frac{५\times४\pi}{६}\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य}-\text{कोज्या}\frac{४\pi}{६}}{\text{ज्या}\frac{४\pi}{६}}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{6}\text{ला}\frac{\text{य}-१}{\text{य}+१} + \frac{1}{12}\text{ला}(\text{य}^२-\text{य}+१) - \frac{1}{12}\text{ला}(\text{य}^२+\text{य}+१)$$

$$+ \frac{१}{२\sqrt{३}}\left\{\text{स्प}^{-१}\left[\frac{२\text{य}-१}{\sqrt{३}}\right] + \text{स्प}^{-१}\left[\frac{२\text{य}+१}{\sqrt{३}}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{6}\text{ला}\frac{\text{य}-१}{\text{य}+१} + \frac{1}{12}\text{ला}\frac{\text{य}^२-\text{य}+१}{\text{य}^२+\text{य}+१} + \frac{१}{२\sqrt{३}}\left\{\text{स्प}^{-१}\left[\frac{२\text{य}-१}{\sqrt{३}}\right] + \text{स्प}^{-१}\left[\frac{२\text{य}+१}{\sqrt{३}}\right]\right\}$$

यही उत्तर हुआ।

(६) उदा० $\int \frac{\text{य}^३\text{ताय}}{\text{य}^५-१}$ इसका क्या मान है।

यहाँ भी २४ वें प्रक्रम से म = ४। न = ५। त = १, २, $\text{ष} = \frac{२\pi}{५}, \frac{४\pi}{५}$ इस लिये

$$\int \frac{\text{य}^{\text{म}-१}\text{ताय}}{\text{य}^{\text{न}}-१} = \frac{\text{ला}(\text{य}-१)}{\text{न}} + \frac{१}{\text{न}}\,\text{यौकोज्यामषला}(\text{य}^२ - २\text{यकोज्या} + १)$$

$$-\frac{२}{\text{न}}\,\text{यौज्यामष स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य}-\text{कोज्याष}}{\text{ज्याष}}\right]$$

$$= \frac{\text{ला}(\text{य}-१)}{५} + \frac{१}{५}\left\{\text{कोज्या}\,\frac{८\pi}{५}\,\text{ला}(\text{य}^२-२\text{यकोज्या}\tfrac{२\pi}{५}+१)\right.$$

$$\left.+\,\text{कोज्या}\,\frac{१६\pi}{५}\,\text{ला}(\text{य}^२-२\text{यकोज्या}\tfrac{४\pi}{५}+१)\right\}$$

$$-\frac{२}{५}\left\{\text{ज्या}\tfrac{८\pi}{५}\,\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य}-\text{कोज्या}\tfrac{२\pi}{५}}{\text{ज्या}\tfrac{२\pi}{५}}\right] + \text{ज्या}\frac{१६\pi}{५}\,\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य}-\text{कोज्या}\;\tfrac{४\pi}{५}}{\text{ज्या}\tfrac{४\pi}{५}}\right]\right\}$$

$$= \frac{\text{ला}(\text{य}-१)}{५} + \frac{१}{५}\left\{\text{ज्या}१८^\circ\text{ला}\,(\text{य}^२-२\text{यकोज्या}७२^\circ+१)\right\}$$

$$-\frac{१}{५}\left\{\text{कोज्या}३६^\circ\text{ला}(\text{य}^२+२\text{यज्या}५४^\circ+१)\right\}$$

$$+\frac{२}{५}\left\{\text{कोज्या}१८^\circ\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य}-\text{कोज्या}७२^\circ}{\text{ज्या}७२^\circ}\right] + \text{ज्या}३६^\circ\,\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य}+\text{कोज्या}३६^\circ}{\text{ज्या}३६^\circ}\right]\right\}$$

$$+\frac{\text{ला}(\text{य}-१)}{५} + \frac{\text{ज्या}१८^\circ}{५}\left\{\text{ला}(\text{य}^२-२\text{यकोज्या}७२^\circ+१)\right\}$$

$$-\frac{\text{ज्या}१८^\circ}{५}\left\{२\text{कोज्या}१८^\circ\text{ला}(\text{य}^२+\text{यज्या}५४^\circ+१)\right\}$$

$$+\frac{२\text{कोज्या}१८^\circ}{५}\left\{\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य}-\text{कोज्या}७२^\circ}{\text{ज्या}७२^\circ}\right] + २\text{ज्या}१८^\circ\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य}+\text{कोज्या}३६^\circ}{\text{ज्या}३६^\circ}\right]\right\}$$

$= \int \frac{\text{य}^३\text{ताय}}{\text{य}^५-१}$ यही उत्तर हुआ ।

(७) उदा० $\int \frac{\text{य}^४\text{ताय}}{\text{य}^६+१}$ इसका क्या मान है ?

यहाँ २५वें प्रक्रम से न = ६ । म = ५, त = १, ३, ५ और ष = $\frac{\pi}{६}, \frac{३\pi}{६}, \frac{५\pi}{६}$

इस लिये $\int \frac{\text{य}^{\text{म}-१}\text{ताय}}{\text{य}^{\text{न}}+१} = -\frac{१}{\text{न}}\,\text{यौकोज्यामषला}(\text{य}^२-२\text{यकोज्याष}+१)$

$+\,\frac{२}{\text{न}}\,\text{यौज्यामष स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य}-\text{कोज्याष}}{\text{ज्याष}}\right] = \int \frac{\text{य}^४\text{ताय}}{\text{य}^६+१}$

$= -\frac{१}{६} \{$ कोज्या$\frac{५\pi}{६}$ला(य^२-२यकोज्या$\frac{\pi}{६}$ + १) + कोज्या$\frac{१५\pi}{६}$ला(य^२-२यकोज्या$\frac{\pi}{२}$ + १)

+ कोज्या$\frac{२५\pi}{६}$ला(य^२-२यकोज्या $\frac{५\pi}{६}$ + १) $\}$

$+ -\frac{१}{३} \{$ ज्या$\frac{५\pi}{६}$स्प$^{-१}$$\left[\frac{\text{य-कोज्या}\frac{\pi}{६}}{\text{ज्या}\frac{\pi}{६}}\right]$ + ज्या$\frac{१५\pi}{६}$स्प$^{-१}$$\left[\frac{\text{य-कोज्या}\frac{\pi}{२}}{\text{ज्या}\frac{\pi}{२}}\right]$

+ ज्या$\frac{२५\pi}{६}$स्प$^{-१}$$\left[\frac{\text{य—कोज्या}\frac{५\pi}{६}}{\text{ज्या}\frac{५\pi}{६}}\right]$ $\}$

$= \frac{१}{६} \{ \frac{\sqrt{३}}{२}$ला(य^२ -य$\sqrt{३}$ + १)—$\frac{\sqrt{३}}{२}$ला(य^२ + य$\sqrt{३}$ + १) $\}$

$+ \frac{१}{३} \{ \frac{१}{२}$ स्प$^{-१}$ $\left[\frac{२\text{य}—\sqrt{३}}{१}\right]$ + स्प$^{-१}$य + $\frac{१}{२}$स्प$^{-१}$ $\left[\frac{२\text{य} + \sqrt{३}}{१}\right]$ $\}$

$= \frac{१}{६} \{$ स्प$^{-१}$ (२य-$\sqrt{३}$) + स्प$^{-१}$ (२य + $\sqrt{३}$) $\}$

+ $\frac{\text{स्प}^{-१}\text{य}}{३}$ + $\frac{१}{४\sqrt{३}}$ ला$\frac{\text{य}^२ —\text{य}\sqrt{३} + १}{\text{य}^२ + \text{य}\sqrt{३} + १}$ यही उत्तर हुआ ।

(८) उदा० $\int \frac{\text{य}^३\text{ताय}}{\text{य}^५ + १}$ इसका क्या मान है ।

यहाँ भी २५वें प्रक्रम से न = ५ । म = ४। त = १,३ । प = $\frac{\pi}{५}$, $\frac{३\pi}{५}$

इस लिये

$\int \frac{\text{य}^{\text{म}-१}\text{ताय}}{\text{य}^\text{न}—१} = \frac{(-१)^{\text{म}-१}}{\text{न}}$ला(य-१) $-\frac{१}{\text{न}}$ यौकोज्यामपला(य^२-२यकोज्याप + १)

+ $\frac{२}{\text{न}}$यौज्यामप स्प$^{-१}$$\left[\frac{\text{य—कोज्याप}}{\text{ज्याप}}\right]$ = $\int \frac{\text{य}^३\text{ताय}}{१}$

$= —\frac{\text{ला(य—१)}}{\text{न}} — \frac{१}{५} \{$ कोज्या $\frac{४\pi}{५}$ला(य^२—२यकोज्या $\frac{\pi}{५}$ + १)

+ कोज्या $\frac{१२\pi}{५}$ला(य^२-२यकोज्या $\frac{३\pi}{५}$ + १) $\}$

$+ \frac{२}{५} \{$ ज्या$\frac{४\pi}{५}$स्य$^{-१}$$\left[\frac{\text{य-कोज्या}\frac{\pi}{५}}{\text{ज्या}\frac{\pi}{५}}\right]$ + ज्या$\frac{१२\pi}{५}$ स्प$^{-१}$$\left[\frac{\text{य-कोज्या}\frac{३\pi}{५}}{\text{ज्या}\frac{३\pi}{५}}\right]$ $\}$

$= - \frac{\text{ला(य —१)}}{५} + \frac{१}{५} \{$ कोज्या३६°ला(य^२—२यकोज्या ३६° + १)

— कोज्या ७२°ला (य^२ + २यकोज्या७२° + १) $\}$

$$+\frac{2}{5}\left\{ \text{ज्या}36^\circ\,\text{स्प}^{-1}\left[\frac{\text{य}\text{कोज्या}36^\circ}{\text{ज्या}36^\circ}\right]+\text{ज्या}72^\circ\,\text{स्प}^{-1}\left[\frac{\text{य}+\text{कोज्या}72^\circ}{\text{ज्या}72^\circ}\right]\right\}$$

$$=-\frac{\text{ला}(\text{य}-1)}{5}$$

$$+\frac{\text{कोज्या}36^\circ}{5}\left\{\text{ला}(\text{य}^2-2\text{य}\text{कोज्या}36^\circ+1)-2\text{ज्या}36^\circ\text{ला}(\text{य}^2+2\text{य}\text{कोज्या}72^\circ+1\right\}$$

$$+\frac{2\text{ज्या}36^\circ}{5}\left\{\text{स्प}^{-1}\left[\frac{\text{य}-\text{कोज्या}36^\circ}{\text{ज्या}36^\circ}\right]+2\text{कोज्या}36^\circ\,\text{स्प}^{-1}\left[\frac{\text{य}+\text{कोज्या}72^\circ}{\text{ज्या}72^\circ}\right]\right\}$$

यही उत्तर हुआ।

(९) उदा० $\int\frac{2+\text{य}^2}{\text{य}^6-1}\,\text{ताय}$ इस का क्या मान होगा।

यहाँ २६वें प्रक्रम से $\text{ग}_0=2$। $\text{ग}_1=0$। $\text{ग}_2=1$। $\text{फ}(\text{य})=2+\text{य}^2$। $\text{न}=6$ और, $\text{त}=1,\ 2$। $\text{ष}=\frac{2\pi}{6},\frac{4\pi}{6}$ इस लिये

$$\frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{य}^{\text{न}}-1}=\frac{\text{फ}(-1)}{\text{न}}\,\frac{(-1)^{\text{न}-1}}{\text{य}+1}+\frac{\text{फ}(1)}{\text{न}}\,\frac{1}{\text{य}-1}$$

$$+\frac{\frac{2}{\text{न}}\,\text{यौ}(\text{ग}_0\text{कोज्याष}+\cdots+\text{ग}_{\text{म}-1}\text{कोज्यामष})\text{य}}{\text{य}^2-2\text{य}\text{कोज्याष}+1}$$

$$-\frac{\text{यौ}\left\{\text{ग}_0+\text{ग}_1\text{कोज्याप}+\cdots+\text{ग}_{\text{म}-1}\text{कोज्या}(\text{म}-1)\text{प}\right\}}{\text{य}^2-2\text{य}\text{कोज्याप}+1}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{\text{य}+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{\text{य}-1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{(2\text{कोज्या}\frac{2\pi}{6}+\text{कोज्या}\frac{6\pi}{6})\,\text{य}-2-\text{कोज्या}\frac{4\pi}{6}}{\text{य}^2-2\text{य}\text{कोज्या}\,\frac{2\pi}{6}+1}$$

$$+\frac{1}{3}\cdot\frac{(2\text{कोज्या}\frac{4\pi}{6}+\text{कोज्या}\frac{12\pi}{6})\text{य}-2-\text{कोज्या}\frac{8\pi}{6}}{\text{य}^2-2\text{य}\text{कोज्या}\frac{8\pi}{6}+1}$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\text{य}-1}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{\text{य}+1}+\frac{1}{3}\,\frac{(1-1)\text{य}-2+\frac{1}{2}}{\text{य}^2-\text{य}+1}+\frac{1}{3}\frac{(-1+1)\text{य}-2+\frac{1}{2}}{\text{य}^2+\text{य}+1}$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\text{य}-1}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{\text{य}+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{\text{य}^2-\text{य}+1}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{\text{य}^2+\text{य}+1}=\frac{2+\text{य}^2}{\text{य}^6-1}$$

इस लिये $\int\frac{2+\text{य}^2}{\text{य}^6-1}\,\text{ताय}=\frac{1}{2}\,\text{ला}\,\frac{\text{य}-1}{\text{य}+1}-\frac{1}{2}\int\frac{\text{ताय}}{\text{य}^2-\text{य}+1}-\frac{1}{2}\int\frac{\text{ताय}}{\text{य}^2+\text{य}+1}$

$$=\frac{1}{2}\,\text{ला}\,\frac{\text{य}-1}{\text{य}+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{स्प}^{-1}\,\frac{2\text{य}+1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{स्प}^{-1}\,\frac{2\text{य}-1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{१}{२}\,\text{ला}\,\frac{य-१}{य+१} - \frac{१}{\sqrt{३}}\left[\text{स्प}^{-१}\,\frac{२य+१}{\sqrt{३}} + \text{स्प}^{-१}\,\frac{२य-१}{\sqrt{३}}\right]$$

यही उत्तर हुआ ।

इस तरह से विद्यार्थियों को चाहिये कि उदाहरणों के रूप के अनुसार जहाँ जिस प्रक्रम का प्रयोजन पड़े उसे अच्छी तरह से समझ कर चलराशि का मान ले आवें ।

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

सिद्ध करो कि

१। $\int \frac{२य+३}{य^{३}+य^{२}-२य}\,\text{ताय} = \frac{१}{६}\,\text{ला}\,\frac{(य-१)^{१०}}{य+२} - \frac{३}{२}\,\text{लाय}$ ।

२। $\int \frac{य^{२}-३}{य^{३}-७य+६}\,\text{ताय} = \frac{१}{१०}\,\text{ला}\left\{(य-२)^{२}(य+३)^{३}\right\} + \text{ला}\left\{(य-१)^{\frac{१}{२}}\right\}$

३। $\int \frac{(२य+१)}{य(य+१)(य+२)}\,\text{ताय} = \text{ला}\left\{\frac{(य+१)\sqrt{य}}{(य+२)^{\frac{३}{२}}}\right\}$।

४। $\int \frac{७य^{२}\,\text{ताय}}{य^{४}-य^{२}-१२} = \text{ला}\left[\frac{य-२}{य+२}\right] + \sqrt{३}\,\text{स्प}^{-१}\left(\frac{य}{\sqrt{३}}\right)$।

५। $\int \frac{६\,\text{ताय}}{य^{३}-१} = \text{ला}\,\frac{(य-१)^{२}}{य^{२}+य+१} - २\sqrt{३}\,\text{स्प}^{-१}\,\frac{२य+१}{\sqrt{३}}$

६। $\int \frac{२य^{३}\,\text{ताय}}{य^{२}+७य+१२} = य^{२}-१४य+१२८\,\text{ला}\,(य+४)-५४\,\text{ला}\,(य+३)$ ।

७। $\int \frac{८अय^{२}-१२अ^{३}}{य^{४}-अ^{४}}\,\text{ताय} = १०\,\text{स्प}^{-१}\,\frac{य}{अ} - \text{ला}\,\frac{य-अ}{य+अ}$ ।

८। $\int \frac{६य^{२}\,\text{ताय}}{य^{४}+य^{२}-२} = \text{ला}\,\frac{य-१}{य+१} + २\sqrt{२}\,\text{स्प}^{-१}\,\frac{य}{\sqrt{२}}$

९। $\int \frac{(१८य-६)\text{ताय}}{य^{३}-य^{२}-२य} = ३\,\text{लाय} + ५\,\text{ला}(य-२) - ८\,\text{ला}(य+१)$ ।

१०। $\int \frac{४\,\text{ताय}}{य(य^{३}+य^{२}+य+१)} = \text{लाय}^{४} - \text{ला}(य+१)^{२} - \text{ला}(य^{२}+१) - २\,\text{स्प}^{-१}\,य$ ।

११। $\int \frac{४\text{ताय}}{(य-१)^{२}(य^{२}+१)^{२}} = \text{ला}(य^{२}+१) - \text{ला}(य-१)^{२} - \frac{१}{य-१}$

$$- \frac{१}{य^{२}+१} + \text{स्प}^{-१}\,य ।$$

१२ । $\int \frac{१०० य \, ताय}{(१ \times २य)^{२}(१+य+य^{२}+य^{३})} = \frac{४०}{१+२य} — ला\,(१+य)^{१०}$

$— ला(१+य^{२})^{५} + ला\,(१ \times २य)^{१४} + २\, स्प^{-१}\, य$ ।

१३ । $\int \frac{४य^{२} ताय}{य^{४}+१} = \frac{१}{\sqrt{२}}\, ला\, \frac{य^{२}-य\sqrt{२}+१}{य^{२}+य\sqrt{२}+१}$

$+ \sqrt{२} \left\{ स्प^{-१}(य\sqrt{२}+१) + स्प^{-१}(य\sqrt{२}-१) \right\}$

१४ । $\int \frac{१२य^{२} ताय}{य^{६}+१} = ला\, \frac{य^{४}-य^{२}+१}{य^{४}+२य^{२}+१}$

$+ २\sqrt{३} \left\{ स्प^{-१}(२य-\sqrt{३}) - स्प^{-१}(२य+\sqrt{३}) \right\}$

१५ । $\int \frac{८\, ताय}{य^{६}+य^{५}-य^{४}-य^{३}} = ला\, \frac{१-य}{१+य^{२}} + ९\, ला\,(१+य) — ८\, लाय$

$+ \frac{४}{य^{२}} — \frac{८}{य} + \frac{२य}{य+१} — २\, स्प^{-१} य$ ।

१६ । $\int \frac{य^{३} ताय}{(अ^{२}+गय^{२})^{४}} = — \frac{१}{४ग^{२}(अ^{२}+गय^{२})^{२}} + \frac{अ}{६ग^{२}(अ^{२}+गय^{२})^{३}}$ ।

१७ । $\int \frac{य^{५} ताय}{(१+य^{२})^{३}} = \frac{१}{य^{२}+१} — \frac{१}{४(य^{२}+१)^{२}} + \frac{१}{२}\, ला\,(य^{२}+१)$ ।

१८ । $\int \frac{(८य-२०) ताय}{(य+३)(य+१)^{२}} = \frac{१४}{य+१} + ११\, ला \left[\frac{य+१}{य+३}\right]$

१९ । $\int \frac{(अ^{२}-क^{२}) ताय}{ज्याय(अ+ककोज्याय)} = (अ+क) ला(ज्या\tfrac{य}{२}) - (अ-क) ला(कोज्या\tfrac{य}{२})$

$+ कला(अ+ककोज्याय)$

यहाँ ज्याय = र मान क्रिया करने में शीघ्र चल ज्ञान होगा ।

२० । $\int \frac{ताय}{३ज्याय+ज्या२य} = लाज्या\tfrac{य}{२} - \tfrac{१}{५}लाकोज्या\tfrac{य}{२} + \tfrac{३}{५}ला(३+२कोज्याय)$ ।

२१ । $\int \frac{तार}{(१-र^{३})^{\frac{१}{३}}} = \tfrac{१}{६}ला(य^{२}+य+१) - \tfrac{१}{२}ला(य-१) - \frac{१}{\sqrt{३}} स्प^{-१}\left(\frac{२य+१}{\sqrt{३}}\right)$ ।

यदि $१ — र^{३} = र^{३}य^{३}$ ।

२२ । $\int \frac{ताय}{(य+१)(३य^{२}+३य+१)^{\frac{१}{३}}} = \int \frac{तार}{(१-र^{३})^{\frac{१}{३}}}$ यदि $र = \frac{य}{१+य}$ ।

२३ । सिद्ध करो कि यदि न सम हो तो $\frac{फ(य)}{य^{न}+१}$

$$= -\frac{२}{न} \frac{यौ \{ ग_०कोज्याष + ग_१कोज्या२ष + \cdots + ग_{म-१} कोज्यामष \} य}{य^२ - २यकोज्याष + १}$$

$$- \frac{यौ \{ ग_० + ग_१कोज्याष + \cdots + ग_{म-१}कोज्या(म-१)ष \}}{य^२ - २यकोज्याष + १}$$

जहाँ $फ(य) = ग_० + ग_१य = म_२य^२ + \cdots + ग_{म-१}य^{म-१}$ और $म < न$

यहाँ ष का मान $= \frac{त\pi}{न}$ जहाँ $त = १, ३, \cdots न-१$ है।

२४। सिद्ध करो कि

$$\int \frac{२+य^२}{१+य^६} ताय = \frac{१}{२\sqrt{३}} ला \frac{य^२ + य\sqrt{३} + १}{य^२ - य\sqrt{३} + १}$$

$$+ \frac{२}{३} \{ स्प^{-१}(२य + \sqrt{३}) + स्प^{-१}(२य - \sqrt{३}) \} + \frac{१}{३} स्प^{-१}य$$

२५। एक महाजन के प्रतिक्षण की आमदनी में, संचित धन के वर्ग में एक घटा कर जो शेष रहे उसका भाग देने से जो लब्ध हो उतनी प्रतिक्षण में उस के गुमाश्ते की आमदनी है तो बताओ जिस समय महाजन के संचित धन का प्रमाण १००००० है उस समय गुमाश्ते के धन का क्या प्रमाण होगा।

उत्तर, गुमाश्ते को उस समय

०·०००००९९४ इतना ऋण हो गया था।

इति द्वितीयोध्याय।

तृतीयाध्याय ।

लघूकरणपरम्परा के विषय में ।

२९ । कल्पना करो कि $\int \frac{\text{ताय}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}}} = \text{च}_{\text{न}}$ ।

$\int \frac{\text{ताय}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}-१}} = \text{च}_{\text{न}-१}$ । इत्यादि मानो ।

और $\frac{१}{\text{य}^2+\text{अ}^2} = \text{त}$, तो खण्डचलानयन से

$$\text{च}_{\text{न}} = \int \frac{\text{ताय}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}}} = \frac{\text{य}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}}} + २\text{न}\int \frac{\text{य}^2\text{ताय}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}+१}}$$

परन्तु $$\frac{\text{य}^2\text{ताय}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}+१}} = \frac{(\text{य}^2+\text{अ}^2)\text{ताय}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}+१}} - \frac{\text{अ}^2\text{ताय}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}+१}}$$

$$= \frac{\text{ताय}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}}} - \frac{\text{अ}^2\text{ताय}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}+१}}$$

इस लिये $$\text{च}_{\text{न}} = \int \frac{\text{ताय}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}}} = \frac{\text{य}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}}}$$

$$+ २\text{न} \left\{ \int \frac{\text{ताय}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}}} - \text{अ}^2 \int \frac{\text{ताय}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}+१}} \right\}$$

$$= \frac{\text{य}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}}} + २\text{न}\ \text{च}_{\text{न}} - २\text{न}\text{अ}^2\text{च}_{\text{न}+१}$$

पक्षान्तरानयन से

$$२\text{न}\ \text{अ}^2\text{च}_{\text{न}+१} = \frac{\text{य}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}}} + (२\text{न}-१)\ \text{च}_{\text{न}}$$

इस लिये $$\text{च}_{\text{न}+१} = \frac{\text{य}}{२\text{न}\text{अ}^2(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}}} + \frac{(२\text{न}-१)}{२\text{न}\text{अ}^2}\text{च}_{\text{न}} = \frac{\text{य}\text{त}^{\text{न}}}{२\text{न}\text{अ}^2} + \frac{(२\text{न}-१)}{२\text{न}\text{अ}^2}\text{च}_{\text{न}}$$

इसमें न के स्थान में न-१ का उत्थापन देने से

$$\text{च}_{\text{न}} = \frac{\text{य}\text{त}^{\text{न}-१}}{\text{अ}^2(२\text{न}-२)} + \frac{२\text{न}-३}{\text{अ}^2(२\text{न}-२)}\text{च}_{\text{न}-१} \quad \cdots (१)$$

यही (१) समीकरण १८वें प्रक्रम के (१) उदाहरण के (अ) सिद्धान्त में भी सिद्ध हुआ है ।

देखो यहाँ $\text{च}_{\text{न}}$ का मान $\text{च}_{\text{न}-१}$ के अधीन है और $\text{च}_{\text{न}-१}$ का मान (१) इसी में न के स्थान में न-१ का उत्थापन देने से

$\frac{यत^{न-२}}{अ^२(२न-४)} + \frac{२न-५}{अ^२(२न-४)} च_{न-२}$ यह होगा।

इसी प्रकार

$$च_{न-२} = \frac{यत^{न-३}}{अ^२(२न-६)} + \frac{२न-७}{अ^२(२न-६)} च_{न-३}$$

⋮ ⋮

$$च_१ = \frac{१}{अ} स्प^{-१} \frac{य}{अ}$$

यहाँ जिस प्रकार से $च_न$, $च_{न-१}$, $च_{न-२}$, ... इत्यादि के मान सिद्ध हुए हैं इसे लघूकरण सिद्धान्त कहते हैं। इसके बल से अनेक चल का ज्ञान हो जाता है। इसके अनेक भेद हैं थोड़ा सा यहां प्रकाश किया जायगा। परन्तु इतना स्मरण रखना चाहिये कि लघूकरण सिद्धान्त से अन्त का चल नहीं सिद्ध होता है उस के लिये पिछले अध्यायों की क्रिया करनी पड़ेगी। जैसे इसी प्रक्रम के (१) समीकरण में यदि न के स्थान में १ का उत्थापन दो तो

$च_१ = \frac{यत^{१-१}}{अ^२(२-२)} + \frac{२-३}{अ^२(२-२)} च_० = \infty$। इस से देखो $च_१$ का मान अनन्त सिद्ध होता है परन्तु पूर्व कल्पना से $च_१ = \int \frac{ताय}{य^२+अ^२}$ और यह प्रथमाध्याय से $\frac{१}{अ} स्प^{-१} \frac{य}{अ}$ इस के तुल्य है।

इस लिये $च_१ = \frac{१}{अ} स्प^{-१} \frac{य}{अ}$ इस का उत्थापन देने से

$$च_२ = \frac{तय}{२अ^२} + \frac{१}{२अ^३} स्प^{-१} \frac{य}{अ}$$

$$च_३ = \frac{त^२य}{४अ^२} + \frac{३तय}{२\cdot४अ^४} + \frac{३}{२\cdot४अ^५} स्प^{-१} \frac{य}{अ}$$

$$च_४ = \frac{त^३य}{६अ^२} + \frac{५त^२य}{४\cdot६अ^४} + \frac{५\cdot३तय}{२\cdot४\cdot६अ^६} + \frac{५\cdot३}{२\cdot४\cdot६अ^७} स्प^{-१} \frac{य}{अ}$$

इत्यादि सिद्ध होते चले जायँगे।

३०। यदि $च_{म,न} = \int \frac{य^म ताय}{(अ^२+य^२)^न}$ तो खण्डचलानयन से

$$\text{च}_{\text{म},\text{न}} = \int \text{य}^{\text{म}-१}\frac{\text{यताय}}{(\text{अ}^२+\text{य}^२)^{\text{न}}} = \int \text{य}^{\text{म}-२}\text{ता}\left\{-\frac{१}{२\text{न}-२}\cdot\frac{१}{(\text{अ}^२+\text{य}^२)^{\text{न}-१}}\right\}$$

$$= -\frac{१}{२\text{न}-२}\cdot\frac{\text{य}^{\text{म}-२}}{(\text{अ}^२+\text{य}^२)^{\text{न}-१}} + \frac{\text{म}-२}{२\text{न}-२}\cdot\int\frac{\text{य}^{\text{म}-३}\text{ताय}}{(\text{अ}^२+\text{य}^२)^{\text{न}-१}}$$

$$= -\frac{१}{२\text{न}-२}\cdot\frac{\text{य}^{\text{म}-२}}{(\text{अ}^२+\text{य}^२)^{\text{न}-१}} + \frac{\text{म}-२}{२\text{न}-२}\,\text{च}_{\text{म}-२,\text{न}-१}$$

इस सिद्धान्त से वार वार क्रिया करने से $\text{च}_{\text{म}-२,\text{न}-१}$। $\text{च}_{\text{म}-४,\text{न}-२}$। $\text{च}_{\text{म}-६,\text{न}-३}$ इत्यादि का मान जान सकते हो। अन्त में म और न के वश से $\int\frac{\text{यताय}}{(\text{अ}^२+\text{य}^२)^{\text{न}}}$।

इस रूप का चल जानना पड़ेगा यदि म विषम और न से इतना छोटा हो कि म—२इ = १ और न—इ >१। अथवा यदि न से म ऐसा बड़ा हो जहाँ वार वार क्रिया करने से अन्त में न—इ = १, म—२इ>१ तो अन्त के चल का रूप $\int\frac{\text{य}^{\text{न}}\text{ताय}}{\text{अ}^२+\text{य}^२}$ ऐसा होगा। इस लिये $\int\frac{\text{यताय}}{(\text{अ}^२+\text{य}^२)^{\text{न}}}$

$$= \frac{१}{२}\int २\,\text{य ताय}\,(\text{अ}^२+\text{य}^२)^{-\text{न}}$$

$= -\frac{१}{२\text{न}-२}\cdot\frac{१}{(\text{अ}^२+\text{य}^२)^{\text{न}-१}}$ यह पहली स्थिति में अन्त के चल का मान होगा। जहाँ न कोई अभिन्न संख्या है। और दूसरी स्थिति के चल का मान साधारण भाग की रीति से $\int\frac{\text{य}^{\text{न}}\text{ताय}}{\text{अ}^२+\text{य}^२}$ इस का $\int \text{फ}(\text{य})$ $+\int\frac{\text{कताय}}{\text{अ}^२+\text{य}^२}$ ऐसा रूप बनाकर जहाँ $\text{फ}(\text{य}) = \{\text{ग}_{\text{त}}\text{य}^{\text{त}}+\text{ग}_{\text{त}-२}\text{य}^{\text{त}-२}+\cdots\text{ग}_{०}\}$

७वें प्रक्रम से सहज में जान सकते हो।

कभी म के सम होने पर $\int\frac{\text{ताय}}{(\text{अ}^२+\text{य}^२)^{\text{न}}}$ ऐसा रूप भी अन्त में रहेगा जिस का चल २९वें प्रक्रम से व्यक्त हो जायगा। जैसे

यहाँ भी यदि $\frac{१}{\text{अ}^२+\text{य}^२} = \text{त}$ तो

$\int\text{य}^६\text{त}^{१०}\text{ताय}$, इस का मान $\int\text{य}^४\text{त}^९\text{ताय}$, $\int\text{य}^२\text{त}^८\text{ताय}$, $\int\text{यत}^७\text{ताय}$ इसके

$\int\text{य}^{१४}\text{त}^८\text{ताय}$, इस का मान $\int\text{य}^{१२}\text{त}^७\text{ताय}$, $\int\text{य}^{१०}\text{त}^६\text{ताय}$, $\int\text{य}^८\text{त}^५\text{ताय}$,

$\int\text{य}^६\text{त ताय}$ इस के

और $\int$ य^{६}त^{६}ताय इस का मान, $\int$ य^{६}त^{५}ताय, $\int$ य^{४}त^{४}ताय, $\int$ य^{२}त^{३}ताय, $\int$ त^{२} ताय इनके अधीन हैं

३१। कल्पना करो कि त = आय^{अ} + काय^{क} और $च_{म,न} = \int य^{म}त^{न}ताय$

तो $य^{म}त^{न} = य^{म}$ (आय^{अ} + काय^{क}) $त^{न-१}$ = $आय^{म+अ}त^{न-१}$ + $काय^{म+क}त^{न-१}$ चलशान करने से

$$च_{म,न} = आच_{म+अ,न-१} + काच_{म+क,न-१} \cdots\cdots \quad (१)$$

परन्तु खण्डचलानयन से $\int य^{म}त^{न}ताय = \frac{य^{म+१}त^{न}}{म+१} - \frac{१}{म+१}\int य^{म+१}ता(त^{न})$

$$= \frac{य^{म+१}त^{न}}{म+१} - \int \frac{य^{म+१}}{म+१} नत^{न-१} (आअय^{अ-१} + काकय^{क-१})ताय$$

$$= \frac{य^{म+१}त^{न}}{म+१} - \frac{नअ}{म+१} आय^{म+१} त^{न-१}ताय - \frac{नक}{म+१}\int का य^{म+क}त^{न-१}ताय$$

$$= \frac{य^{म+१}त^{न}}{म+१} - \frac{नअ}{म+१} आच_{म+अ,न-१} - \frac{नक}{म+१} काच_{म+क,न-१} \cdots\cdots \quad (२)$$

(१) और (२) से $काच_{म+क,न-१}$ को उड़ा देने से

$$च_{म,न} = \frac{य^{म+१}त^{न}}{म+नक+१} + \frac{नक-नअ}{म+नक+१} आच_{म+अ,न-१} \cdots\cdots (३)$$

यह एक लघूकरण सिद्धान्त हुआ यदि न धन संख्या हो तो।

जैसे $\int य^{१०}त^{५}ताय$ इस का मान जानना हो तो यहाँ इसी सिद्धान्त से तीन वार क्रिया करने से $\int य^{१०+अ}त^{४}ताय$, $\int य^{१०+२अ}त^{३}ताय$ इन का मान व्यक्त हो जायगा अन्त में $\int य^{१०+३अ}त^{२}ताय$ यह रह जायगा।

यदि न का मान ऋण हो तो पहले (३) से छेदगम कर, समशोधनादि से $च_{म+अ,न-१} = -\frac{य^{म+१}त^{न}}{(क-अ)नआ} + \frac{म+नक+१}{(क-अ)नआ} च_{म,न}$ ऐसा समीकरण बना कर इस में म के स्थान में म—अ का और न के स्थान से —(न-१) का उत्थापन देने से

$$च_{म,-न} = \frac{य^{म-अ+१}त^{-(न-१)}}{(क-अ)(न-१)आ} - \frac{म-अ-(न-१)क+१}{(क-अ)(न-१)आ} च_{म-अ,-(न-१)} \cdots\cdots (४)$$

इस पर से $\int$ य^{५}त$^{-\frac{९}{२}}$ इसके मान में $\int$ य$^{५-अ}$त$^{-\frac{७}{२}}$ताय यह और इस में $\int$ य$^{५-२अ}$त$^{-\frac{५}{२}}$ताय इत्यादि आवेंगे अन्त में $\int$ य$^{५-४अ}$त$^{-\frac{१}{२}}$ ताय यह आवेगा ।

इसी तरह (१) और (२) से यदि च$_{म, न}$को उड़ावो तो

$$य^{म+१}त^{न} = (म + नअ + १)आच_{म+अ, न-१} + (म + नक + १)काच_{म+क, न-१} \cdots (५)$$

इस में न के स्थान में न + १ का और म के स्थान में म−अ का उत्थापन देने से

$$च_{म, न} = \frac{य^{म-अ+१}त^{न+१}}{(म + नअ + १)आ} - \frac{म + (न + १)क - अ + १}{(म + नअ + १)आ}काच_{म-अ+क, न} \cdots (६)$$

यह य के उत्तरोत्तर लघुघात के रूप में च$_{म, न}$का रूप ले आता है यदि अ $>$ क हो तो ।

३२ । कल्पना करो कि त = अ + कय + गय^{२} तो $\int$ य^{म}त^{न}ताय = च$_{म, न}$ इस का मान जानने के लिये ३१वें प्रक्रम की युक्ति से त^{न} = (अ + कय + गय^{२})त$^{न-१}$ ऐसा मान और य^{म} से गुण कर चलानयन करने से

$$च_{म, न} = अच_{म, न-१} + कच_{म+१, न-१} + गच_{म+२, न-१}$$ ऐसा होगा ।

$$इस\ लिये\ \frac{२न}{म + १} च_{म, न} = \frac{२न}{म + १}(अच_{म, न-१} + कच_{म+१, न-१})$$

$$+ \frac{२नग}{म + १} च_{म+२, न-१} \cdots\cdots\cdots\cdots (१)$$

और खण्डचलानयन से

$$च_{म, न} = \frac{य^{म+१}त^{न}}{म + १} - \frac{नक}{म + १} च_{म+१, न-१} - \frac{२नग}{म + १} च_{म+२, न-१} \cdots (२)$$

(१) और (२) को जोड़ देने से

$$\frac{म + २न + १}{म + १} च_{म, न} = \frac{य^{म+१}त^{न}}{म + १} + \frac{२नअ}{म + १} च_{म, न-१} + \frac{नक}{म + १} च_{म+१, न-१}$$

$$इस\ लिये\ च_{म, न} = \frac{य^{म+१}त^{न}}{२न + म + १} + \frac{२नअ}{२न + म + १} च_{म, न-१}$$

$$+ \frac{नक}{२न + म + १} च_{म+१, न-१} \cdots\cdots (३)$$

इसी प्रकार (१) और (२) से

$$य^{म+१}त^{न} = (म+१)अच_{म,न-१} + (म+न+१)कच_{म+१,न-१}$$
$$+ (म+२न+१)गच_{म+२,न-१} \cdots\cdots (४)$$

(४) में म के स्थान में म—२ का और न के स्थान में न + १ का उत्थापन देने से और समशोधनादि से

$$च_{म,न} = \frac{य^{म-१}त^{न+१}}{ग(म+२न+१)} - \frac{(म+न)}{ग(म+२न+१)} च_{म-१,न} - \frac{अ(म-१)}{ग(म+२न+१)} च_{म-२,न}. \quad (५)$$

यह एक लघूकरण सिद्धान्त $च_{म,न}$ का मान जानने के लिये य के उत्तरोत्तर घात ह्रास में उत्पन्न हुआ।

(४) में म के स्थान में—म का और न के स्थान में न + १ का उत्थापन देने से

$$च_{-म,न} = -\frac{त^{न+१}}{अ(म-१)य^{म-१}} - \frac{क(म-न-२)}{अ(म-१)} च_{-(म-१),न}$$
$$- \frac{ग(म-२न-३)}{अ(म-१)} च_{-(म-२),न} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (६)$$

यह म के ऋण मान में लघूकरणसिद्धान्त उत्पन्न हुआ।

३३। ३१वें प्रक्रम में यदि $त = आय^{अ} + कायक$ इस में $क = 0$ तो $त = का + आय^{अ}$ ऐसा हुआ और (१), (२) इत्यादि समीकरण में क के स्थान में शून्य का उत्थापन देने से

$$च_{म,न} = आच_{म+अ,न-१} + काच_{म,न-१} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (१)$$

$$च_{म,न} = \frac{य^{म+१}त^{न}}{म+१} - \frac{नअआ}{म+१} च_{म+अ,न-१} \cdots\cdots\cdots\cdots (२)$$

$$च_{म,न} = \frac{य^{म+१}त^{न}}{म+१} - \frac{नअआ}{म+१} च_{म+अ,न-१} \cdots\cdots\cdots\cdots (३)$$

$$\left.\begin{aligned} च_{म,-न} &= -\frac{य^{म-अ+१}त^{-(न-१)}}{अआ(न-१)} + \frac{म-अ+१}{अआ(न-१)} च_{म-अ,-(न-१)} \\ च_{म,न} &= +\frac{य^{म-अ+१}त^{न+१}}{अआ(न+१)} - \frac{म-अ+१}{अआ(न+१)} च_{म-अ,न+१} \end{aligned}\right\} \cdots (४)$$

यदि न = —न

$$य^{म+१}त^{न} = (म+नअ+१)आच_{म+अ,न-१} + (म+१)काच_{म,न-१} \cdots\cdots (५)$$

$$\text{च}_{\text{म},\text{न}} = \frac{\text{य}^{\text{म}-\text{अ}+१}\text{त}^{\text{न}+१}}{\text{आ}(\text{म}+\text{नअ}+१)} - \frac{\text{म}-\text{अ}+१}{\text{आ}(\text{म}+\text{नअ}+१)}\text{काच}_{\text{म}-\text{अ}\ \text{न}} \quad \cdots\cdots (६)$$

ऐसे ६ समीकरण उत्पन्न होते हैं इन पर से अनेक चलज्ञान सहज में हो जाते हैं। वे छवो समीकरण यदि वास्तव में विचारो तो ३१वें प्रक्रम के उदाहरण रूप हैं। इन पर से टाड्हन्टर (Todhunter) साहब ने चलराशिकलन के ३०वें प्रक्रम में जो क्रिया की है वह भी उत्पन्न हो जाती है।

यहां (२) से

$$\text{च}_{\ +\text{अ},\text{न}-१} = \frac{\text{य}^{\text{म}+१}\text{त}^{\text{न}}}{\text{नअआ}} - \frac{\text{म}+१}{\text{नअआ}}\text{च}_{\text{म}\ \text{न}}$$ इसका उत्थापन (१) में देने से

$$\text{च}_{\text{म},\text{न}} = \frac{\text{य}^{\text{म}+१}\text{त}^{\text{न}}}{\text{नअ}} - \frac{\text{म}+१}{\text{नअ}}\text{च}_{\text{म},\text{न}} + \text{काच}_{\text{म},\text{न}-१},$$

$$\text{इस लिये च}_{\text{म},\text{न}} = \frac{\text{य}^{\text{म}+१}\text{त}^{\text{न}}}{\text{म}+\text{नअ}+१} + \frac{\text{कानअ}}{\text{म}+\text{नअ}+१}\text{च}_{\text{म}\ \text{न}-१} \quad \cdots\cdots (७)$$

यहां न के स्थान में न + १ का उत्थापन देकर समशोधनादि से

$$\text{च}_{\text{म},\text{न}} = \frac{\text{य}^{\text{म}+१}\text{त}^{\text{न}+१}}{\text{काअ}(\text{न}+१)} + \frac{\text{म}+\text{अन}+\text{अ}+१}{\text{काअ}(\text{न}+१)}\text{च}_{\text{म},\text{न}+१} \quad \cdots\cdots (८)$$

इस तरह से अनेक सिद्धान्त बना सकते हो।

३४। इस प्रक्रम में पूर्व समीकरणों की व्याप्ति दिखलाने के लिये कुछ उदाहरण दिखलाते हैं।

(१) $\text{य}^{\text{म}}(\text{ग}^२-\text{य}^२)^{-\frac{१}{२}}$ ताय इसका चल क्या है।

यहां यदि का $= \text{ग}^२$, आ $= -१$, अ $= २$. न $= -\frac{१}{२}$ कल्पना करो तो ३३वें प्रक्रम के (६)वें समीकरण से

$$\text{च}_{\text{म},\text{न}} = \frac{\text{य}^{\text{म}-\text{अ}+१}\text{त}^{\text{न}+१}}{\text{आ}(\text{म}+\text{नअ}+१)} - \frac{\text{म}-\text{अ}+१}{\text{आ}(\text{म}+\text{नअ}+१)}\text{काच}_{\text{म}-\text{अ},\text{न}}$$

$$= \frac{\text{य}^{\text{म}-२+१}(\text{ग}^२-\text{य}^२)^{-\frac{१}{२}+१}}{-१(\text{म}+२\times-\frac{१}{२}+१)} - \frac{\text{म}-२+१}{-१(\text{म}+२\times\frac{१}{२}+१)}\text{ग}^२\int \text{य}^{\text{म}-२}(\text{ग}^२-\text{य}^२)^{-\frac{१}{२}}\text{ताय}$$

$$= -\frac{\text{य}^{\text{म}-१}\sqrt{\text{ग}^२-\text{य}^२}}{\text{म}} + \frac{(\text{म}-१)\text{ग}^२}{\text{म}}\int \text{य}^{\text{म}-२}(\text{ग}^२-\text{य}^२)^{-\frac{१}{२}}\text{ताय},$$ ऐसा हुआ।

खण्डचलानयन से भी

$$\int \text{य}^{\text{म}}(\text{ग}^२-\text{य}^२)^{-\frac{१}{२}}\text{ताय} = -\int \text{य}^{\text{म}-१}\text{ता}\,(\text{ग}^२-\text{य}^२)^{+\frac{१}{२}}$$

$$= -य^{म-१}\sqrt{ग^२—य^२}+(म—१)\int य^{म-२}\sqrt{ग^२—य^२}ताय$$

$$=—य^{म-१}\sqrt{ग^२—य^२}+(म—१)\int\frac{य^{म-२}(ग^२—य^२)ताय}{\sqrt{ग^२—य^२}}$$

$$=—य^{म-१}\sqrt{ग^२—य^२}$$

$$—(म—१)\int य^म\sqrt{२(ग^२-य^२)}^{\frac{१}{२}} ताय+(म—१)ग^२\int\frac{य^{म-२}}{\sqrt{ग^२—य^२}}ताय$$

इस लिये पक्षान्तरानयन से

$$\int य^म(ग^२—य^२)^{—\frac{१}{२}}=—\frac{य^{म-१}\sqrt{ग^२—य^२}}{म}$$

$$+\frac{(म-१)ग^२}{म}\int य^{म-२}(ग^२-य^२)^{—\frac{१}{२}} ताय$$

इस तरह से वही सिद्ध हुआ जो पहले (६)वें समीकरण से हुआ था भेद इतनाही है कि पहले प्रकार से लाघव और दूसरे से गौरव है।

(२) $\int\frac{ताय}{य^म(अ^२+य^२)^{\frac{१}{२}}}$ इसका मान जानना है।

यहाँ यदि म = —म, न = —$\frac{१}{२}$, आ = अ^२, अ = ०, का = १, क = २ मानो तो ३१वें प्रक्रम के ६वें समीकरण से

$$च_{म,न}=\frac{य^{म-अ+१}त^{न+१}}{(म+नअ+१)आ}—\frac{म+(न+१)क-अ+१}{(म+नअ+१)आ}काच_{म-अ+क,न}$$

$$=\frac{य^{-म+१}त^{-\frac{१}{२}+१}}{(-म+१)अ^२}—\frac{-म+(-\frac{१}{२}+१)२+१}{(-म+१)अ^२}च_{(-म+२,न)}$$

$$=—\frac{\sqrt{त}}{अ^२(म-१)य^{म-१}}+\frac{—म+१+१}{अ^२(म-१)}\int अ^{-म+२}(अ^२+य^२)^{-\frac{१}{२}} ताय$$

$$=—\frac{\sqrt{अ^२+य^२}}{अ^२(म-१)य^{म-१}}—\frac{म-२}{अ^२(म-१)}\int\frac{ताय}{य^{म-२}\sqrt{अ^२+य^२}}$$ यह सिद्ध हुआ।

इसी उदाहरण को खण्डचलानयन से भी कर सकते हो। जैसे

$$\int\frac{ताय}{य^म\sqrt{अ^२+य^२}}=\int\frac{१}{य^{म+१}}ता\sqrt{अ^२+य^२}=\frac{\sqrt{अ^२+य^२}}{य^{म+१}}+(म+१)\frac{\sqrt{अ^२+य^२}}{य^{म+२}}ताय$$

$$=\frac{\sqrt{अ^२+य^२}}{य^{म+१}}+(म+१)\int\frac{अ^२+य^२}{य^{म+२}\sqrt{अ^२+य^२}}ताय$$

समशोधनादि से

$$अ^2(म+१)\int\frac{ताय}{य^{म+२}\sqrt{अ^2+य^2}}=-\frac{\sqrt{अ^2+य^2}}{य^{म+१}}-म\int\frac{ताय}{य^{म}\sqrt{अ^2+य^2}}$$

म के स्थान में म−२ का उत्थापन देकर $अ^2(म-१)$का भाग दे देने से

$$\int\frac{ताय}{य^{म}\sqrt{अ^2+य^2}}=-\frac{\sqrt{अ^2+य^2}}{अ^2(म-१)य^{म-१}}-\frac{म-२}{अ^2(म-१)}\int\frac{ताय}{य^{म-२}\sqrt{अ^2+य^2}}$$

यही पहले भी सिद्ध हुआ था।

(३) $\int\frac{य^{म}ताय}{\sqrt{(२अय-य^2)}}$ इसका क्या मान है।

यहाँ $\frac{य^{म}ताय}{\sqrt{२अय-य^2}}=य^{म-\frac{1}{2}}(२अ-य)^{-\frac{1}{2}}$ ताय, इस लिये ३३वें प्रक्रम के (८)वें समीकरण से (यदि का = २अ, आ = −१, अ = १, क = ०, म = म—½, न = —½)

$$च_{म,न}=-\frac{य^{म+१}त^{न+१}}{काअ(न+१)}+\frac{म+अन+अ+१}{काअ(न+१)}च_{म-\frac{1}{2}\,न}$$

$$=-\frac{य^{म-\frac{1}{2}+१}त^{-\frac{1}{2}+१}}{२अ(-\frac{1}{2}+१)}+\frac{म-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot,+१+१}{२अ(-\frac{1}{2}+१)}च_{म-\frac{1}{2},न+१}$$

$$=-\frac{य^{म+\frac{1}{2}}त^{\frac{1}{2}}}{अ}+\frac{म+१}{अ}च_{म-\frac{1}{2},न+१}$$

$$=-\frac{य^{म+\frac{1}{2}}(२अ-य)^{\frac{1}{2}}}{अ}+\frac{म+१}{अ}\int य^{म-\frac{1}{2}}(२अ-य)^{\frac{1}{2}}\ ताय$$

$$=-\frac{य^{म}(२अय-य^2)^{\frac{1}{2}}}{अ}+\frac{म+१}{अ}\int य^{म-१}(२अय-य^2)^{\frac{1}{2}}ताय$$ यह सिद्ध हुआ।

वा ३३वें प्रक्रम के ९वें समीकरण में पूर्वोक्त संख्याओं का उत्थापन देने से

$$च_{म,न}=\int य^{म-\frac{1}{2}}(२अ-य)^{-\frac{1}{2}}\ ताय$$

$$=-\frac{य^{म-१}\sqrt{(२अय-य^2)}}{म}+\frac{अ(२म-१)}{म}\int\frac{य^{म-१}ताय}{\sqrt{(२अय-य^2)}}$$ ऐसा होगा।

इसे खण्डचलानयन से भी सिद्ध कर सकते हो जैसे

$$\int\frac{य^{म}ताय}{\sqrt{(२अय-य^2)}}=य^{म-१}\frac{(य-अ+अ)ताय}{\sqrt{(२अय-य^2)}}=\int -य^{म-१}ता\sqrt{(२अय-य^2)}$$

$$+\text{अ}\int\frac{\text{ताय य}^{\text{म}-१}}{\sqrt{(२\text{अय}-\text{य}^२)}}$$

$$=-\text{य}^{\text{म}-१}\sqrt{(२\text{अय}-\text{य}^२)}+(\text{म}-१)\int\text{य}^{\text{म}-२}\sqrt{(२\text{अय}-\text{य}^२)}\text{ताय}$$

$$+\text{अ}\int\frac{\text{तायय}^{\text{म}-१}}{\sqrt{(२\text{अय}-\text{य}^२)}}$$

$$=-\text{य}^{\text{म}-१}\sqrt{(२\text{अय}-\text{य}^२)}+(\text{म}-१)\int\frac{\text{य}^{\text{म}-२}(२\text{अय}-\text{य}^२)\text{ताय}}{\sqrt{(२\text{अय}-\text{य}^२)}}$$

$$+\text{अ}\int\frac{\text{तायय}^{\text{म}-१}}{\sqrt{(२\text{अय}-\text{य}^२)}}$$

$$=-\text{य}^{\text{म}-१}\sqrt{(२\text{अय}-\text{य}^२)}-(\text{म}-१)\int\frac{\text{य}^{\text{म}}\text{ताय}}{\sqrt{(२\text{अय}-\text{य}^२)}}$$

$$+\text{अ}(२\text{म}-१)\frac{\text{तायय}^{\text{म}-१}}{\sqrt{(२\text{अय}-\text{य}^२)}}$$

पक्षान्तरानयन से और म का भाग दे देने से

$$\int\frac{\text{य}^{\text{म}}\text{ताय}}{\sqrt{(२\text{अय}-\text{य}^२)}}=-\frac{\text{य}^{\text{म}-१}\sqrt{(२\text{अय}-\text{य}^२)}}{\text{म}}+\frac{\text{अ}(२\text{म}-१)}{\text{म}}\int\frac{\text{य}^{\text{म}-१}\text{ताय}}{\sqrt{(२\text{अय}-\text{य}^२)}},$$

यही पहले भी सिद्ध हुआ था।

(४) $\int\frac{\text{ताय}}{(\text{य}^२+\text{अ}^२)^{\text{न}}}$ इस का क्या मान होगा।

यहाँ म = ०, न = —न, आ = १, अ = २, का = $\text{अ}^२$, इन का ३३वें प्रक्रम के (८)वें में उत्थापन देने से

$$\text{च}_{\text{म},\text{न}}=\text{च}_{०,-\text{न}}=-\frac{\text{य}^{\text{म}+१}\text{त}^{\text{न}+१}}{\text{का}\text{अ}(\text{न}+१)}+\frac{\text{म}+\text{अन}+\text{अ}+१}{\text{का}\text{अ}(\text{न}+१)}\text{च}_{\text{म},\text{न}+१}$$

$$=-\frac{\text{य}^{०+१}\text{त}^{-\text{न}+१}}{२\text{अ}^२(-\text{न}+१)}+\frac{०+-२\text{न}+२+१}{२\text{अ}^२(-\text{न}+१)}\text{च}_{०,-\text{न}+१}$$

$$=\frac{१}{(\text{य}^२+\text{अ}^२)^{\text{न}-१}}\cdot\frac{\text{य}}{२\text{अ}^२(\text{न}-१)}+\frac{१\text{न}-३}{२\text{अ}^२(\text{न}-१)}\int\frac{\text{ताय}}{(\text{य}^२+\text{अ}^२)^{\text{न}-१}}$$

देखो १९वें प्रक्रम से भी यही लघूकरण सिद्धान्त उत्पन्न हुआ है।

इस तरह हजारों नये नये सिद्धान्त लघूकरणसिद्धान्तों के बल चलानयन के लिये बना सकते हो।

३५। लघूकरणसिद्धान्त के बल से त्रिकोणमिति सम्बन्धि फलों के चल का भी ज्ञान सहज में हो जाता है जैसे यदि

$\int$ फ(ज्याय, कोज्याय) ताय इस का ज्ञान करना हो तो कल्पना करो कि ज्याय = र $\therefore$ ताय = $\frac{\text{तार}}{\text{कोज्याय}} = \frac{\text{तार}}{\sqrt{१—र^२}}$ क्योंकि कोज्याय = $\sqrt{१—र^२}$ इन का उत्थापन देने से

$$\int \text{फ(ज्याय, कोज्याय)ताय} = \int \text{फ}\left\{ र, \sqrt{(१—र^२)} \right\} \frac{\text{तार}}{\sqrt{(१-र^२)}} \cdot \quad \cdot (१)$$

यहाँ यदि फ(ज्याय, कोज्याय) = ज्या^{द}यकोज्या^{ध}य तो

$$\int \text{फ(ज्याय, कोज्याय) ताय} = \int र^{द}(१—र^२)^{\frac{१}{२}(ध—१)}\text{तार} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot (२)$$

यदि ३३वें प्रक्रम के समीकरणों में का = १, अ = —१, अ = २, म = द, और न = $\frac{१}{२}$ (ध—१) कल्पना करो तो

$$\int र^{द}(१—र^२)^{\frac{१}{२}(ध-१)}\text{तार} = च_{द, \frac{१}{२}(ध—१)} = च_{द,ब} \text{ यदि } \frac{१}{२}(ध-१) = ब$$

$$च_{द,ब} = — च_{द+२,ब-१} + च_{द,ब-१} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (३)$$

$$च_{द,ब} = \frac{र^{द+१}त^{ब}}{द+१} + \frac{२ब}{द+१} च_{द+२,ब-१} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (४)$$

$$च_{द,-ब} = + \frac{र^{द-१}त^{-(ब-१)}}{ब—१} — \frac{द—१}{ब—१} च_{द-२,-(ब-१)} \quad \cdots\cdots \quad (५)$$

$$च_{द,ब} = -\frac{र^{द-१}त^{ब+१}}{२(ब+१)} + \frac{द—१}{(ब+१)} च_{द-२,ब+१} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (६)$$

$$र^{द+१}त^{ब} = —(द+२ब+१)\, च_{द+२,ब-१} + (द+१)\, च_{द,ब-१} \quad \cdots\cdots (७)$$

$$च_{द,ब} = -\frac{र^{द-१}त^{ब+१}}{द+२ब+१} + \frac{द—१}{द+२ब+१} च_{द-२,ब} \quad \cdots\cdots\cdots (८)$$

$$च_{द,ब} = \frac{र^{द+१}त^{ब}}{द+२ब+१} + \frac{२ब}{द+२ब+१} च_{द,ब-१} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (९)$$

$$च_{द,ब} = — \frac{र^{द+१}त^{ब+१}}{२(ब+१)} + \frac{द+२ब+२+१}{२(ब+१)} च_{द,ब+१} \quad \cdots\cdots\cdots (१०)$$

$$च_{द,ब} = \frac{र^{द+१}त^{ब+१}}{द+१} + \frac{द+२(ब+१)+१}{द+१} च_{द+२,ब} \quad \cdots\cdots\cdots (११)$$

यदि ३१वें प्रक्रम के ६वें समीकरण में का, क के स्थान में आ, अ के

उत्थापन दो और आ, अ के स्थान में का, क का तो पिछला सिद्धान्त उत्पन्न होगा।

(२) में यदि ध—१ = ० अर्थात् ध = १ मानो तो ब = ० इनका उत्थापन (८)वें में देने से

$$च_{द,०} = \int ज्या^{द}य\ कोज्याय\ ताय = -\frac{ज्या^{द-१}यकोज्या^{२}य}{द+१} + \frac{द-१}{द+१}च_{द-२,०}$$

$$= \frac{ज्या^{द-१}यकोज्या^{२}य}{द+१} + \frac{द-१}{द+१}\int ज्या^{द-२}यकोज्यायताय$$

इसी प्रकार $\int र^{द}(१-र^{२})^{\frac{१}{२}(ध-१)}$तार इस में र के स्थान में इसका पहला मान ज्याय रखदो तो $\int र^{द}(१-र^{२})^{\frac{१}{२}(ध-१)}$तार

$= \int ज्या^{द}य\cdot कोज्या^{ध-१}य\cdot$ कोज्यायताय। अब यहां यदि ध = ० तो $\int ज्या^{द}य\ कोज्या^{ध-१}यकोज्याय\ ताय$

$= \int ज्या^{द}यताय$ ऐसा होगा। इस लिये $\frac{१}{२}(ध-१) = ब = -\frac{१}{२}$ इनका उत्थापन इसी प्रक्रम के (८)वें समीकरण में देने से

$$च_{द,ब} = \frac{र^{द-१}त^{ब+१}}{द+२ब+१} + \frac{द-१}{द+२ब+१}च_{द-२,ब}$$

$$= -\frac{ज्या^{द-१}यकोज्याय}{द} + \frac{द-१}{द}\int ज्या^{द-२}य\ ताय = \int ज्या^{द}य\ ताय।$$

देखो ठीक यही खण्डचलानयन १२वें प्रक्रम के १५वें उदाहरण में भी सिद्ध हुआ है। केवल द के स्थान में न का उत्थापन मात्र देना होगा।

इस तरह पीछे दिखलाये हुए समीकरणों के बल से सैकड़ों लघूकरण सिद्धान्त उत्पन्न हो जाते हैं विद्यार्थियों को चाहिये कि उन का अच्छी तरह से अभ्यास करें।

३६। ३१वें प्रक्रम की युक्ति से यदि $त = आय^{अ} + काय^{क} + गाय^{ग} + \cdots$ और $च_{म,} = \int य^{म}त^{न}ताय$ तो यहां भी उसी तरह से $च_{म,न}$ का मान जान सकते हो। जैसे

$$त^{न} = (आय^{अ} + काय^{क} + गाय^{ग} + \cdots)\ त^{न-१}$$

इस लिये, $य^{म}त^{न} = (आय^{म+अ} + काय^{म+क} + गाय^{म+ग} + \cdots)त^{न-१}$

$$\int य^{म}त^{न}ताय = आ.\int य^{म+अ}त^{न-१}ताय + का.\int य^{म+क}त^{न-१}ताय + गा.\int य^{म+ग}त^{न-१}ताय + \cdots$$

अर्थात् $च_{म,न} = आच_{म+अ,न-१} + काच_{म+क,न-१} + गाच_{म+ग,न+१} + \cdots (१)$

और खण्डचलानयन से

$$च_{म,न} = \int य^{म}त^{न}ताय = \frac{य^{म+१}त^{न}}{म+१}$$

$$- \frac{नय^{म+१}त^{न-१}}{म+१}(अआय^{अ-१} + ककाय^{क-१} + गगाय^{ग-१} + \cdots)ताय$$

$$= \frac{य^{म+१}त^{न}}{म+१} - \frac{नअ}{म+१}आच_{म+अ,न-१}$$

$$- \frac{नक}{म+१}काच_{म+क,न-१} - \frac{नग}{म+१}गाच_{म+ग,न-१}\cdots$$

छेदगम कर पक्षान्तरानयन से

$$य^{म+१}त^{न} = च_{\ ,न}(म+१) + नअआच_{म+अ,न-१} + नककाच_{म+क,न-१} + नगगाच_{म+ग,न-१} + \cdots$$

(१) से $च_{म,न}$ का उत्थापन देने से और $म + नअ + १ = अ'$, $म + नक + १ = क'$, $म + नग + १ = ग'$ इत्यादि कल्पना करने से

$$य^{म-१}त^{न} = अ'आच_{म+अ,न-१} + क'काच_{म+क,न-१} + ग'गाच_{म+ग,न-१} + \cdots \qquad (२)$$

इस तरह अनेक चमत्कार दिखा सकते हो।

३७। लघूकरण सिद्धान्त से दो मानों के भीतर का चलज्ञान बहुत ही सहज में हो जाता है अर्थात् इस से सान्तचल मान बहुत ही सुगम हो जाता है।

जितने पिछले प्रक्रमों में लघूकरण सिद्धान्तों के लिये समीकरणों को दिखाया है सबका मूल यदि ध्यान दे कर देखो तो खण्डचलानयन ही है इसलिये खण्ड-चलानयन को लघूकरण का मूल कह सकते हैं।

दो सीमाओं के भीतर के चलज्ञान के लिये कुछ उदाहरण दिखाते हैं।

(१) $\int (ग^{२} - य^{२})^{\frac{न}{२}}ताय$ इसके मान के लिये खण्डचलानयन से

$\int (ग^{२}-य^{२})^{\frac{न}{२}}ताय = \frac{य(ग^{२}-य^{२})^{\frac{न}{२}}}{न+१} + \frac{नग^{२}}{न+१}\int (ग^{२}-य^{२})^{\frac{न}{२}-१}ताय$, यह एक लघूकरण सिद्धान्त उत्पन्न हुआ इस में यदि य = ० वा य = ग तो स्पष्ट है कि प्रथम खण्ड शून्य के तुल्य हो जायगा इस लिये

$\int_{0}^{ग} (ग^{2}-य^{2})^{\frac{न}{2}} ताय = \frac{नग^{2}}{न+१}\int_{0}^{ग} (ग^{2}-य^{2})^{\frac{न}{2}-१} ताय$ यह सिद्ध हुआ।

(२) $\int य^{म-१}(१-य)^{न-१}$ ताय इसके मान के लिये खण्डचलानयन से

$$\int य^{म-१}(१-य)^{न-१} ताय = -\frac{(१-य)^{न}}{न} य^{म-१} + \frac{म-१}{न}\int य^{म-२}(१-य)^{न} ताय$$

ऐसा लघूकरण सिद्धान्त उत्पन्न होता है। यहां यदि य = ० वा १ तो स्पष्ट है कि प्रथम खण्ड शून्य हो जायगा इस लिये

$$\int_{0}^{१} य^{म-१}(१-य)^{न-१} ताय = \frac{म-१}{म}\int_{0}^{१} य^{म-२}(१-य)^{न} ताय$$

और $\int_{0}^{१} य^{म-२}(१-य)^{न} ताय = \frac{म-२}{न+१}\int_{0}^{१} य^{म-३}(१-य)^{न+१} ताय$

इसी तरह $\int_{0}^{१} य^{म-३}(१-य)^{न+१} ताय = \frac{म-३}{न+२}\int_{0}^{१} य^{म-४}(१-य)^{न+२} ताय$

.

$$\int_{0}^{१} य\ (१-य)^{न+म-३} = \frac{१}{न+म-२}\int_{0}^{१} (१-य)^{न+म-२} ताय$$

और $\int (१-य)^{न+म-२} ताय = -\frac{१}{न+म-१}(१-य)^{न+म-१}$

इस लिये $\int_{0}^{१} (१-य)^{न+म-२} ताय = \frac{१}{न+म-१}$ इन सब का उत्थापन

देने से $\int_{0}^{१} य^{म-१}(१-य)^{न-१} ताय = \frac{(म-१)(म-२)....३.२.१}{न(न+१)(न+२)......(न+म-१)}$ यह होगा

(३) $\int छे^{४}ष\ ताष = \int (१+स्प^{२}ष)^{२} ताप = \int (१+२स्प^{२}ष+स्प^{४}ष) ताष$

$= \int ताष + २\int स्प^{२}षताष + \int स्प^{४}षताष = ष + २\int स्प^{२}षताष + \int स्प^{४}षताष$।

परन्तु $\int स्प^{२न}षताष = \int स्प^{२न-२}ष(छे^{२}ष-१)ताष$

$= \int स्प^{२न-२}षछे^{२}षताष - \int स्प^{२न-२}षताष$

$= \int स्प^{२न-२}प\ ता\ स्पष - \int स्प^{२न-२}षताप$

$= \frac{स्प^{२न-१}}{२न-१} - \int स्प^{२न-२}पताष$

$$= \frac{स्प^{२न-१}}{२न-१} - \frac{स्प^{२न-३}}{२न-३} + \int स्प^{न-४} ताप$$

$$= \frac{स्प^{२न-१}}{२न-१} - \frac{स्प^{२न-३}}{२न-३} + \frac{स्प^{२न-५}}{२न-५} - \cdots + \cdots - (-१)^{न} स्पप + (-१)^{न} प$$

यार वार क्रिया करने से, प्रथमाध्याय का ४६वाँ अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखा है उसे देखो ।

इस पर से $२ \int स्प^{२} पताप = २स्पप - २प$

$$\int स्प^{४} पताप = \frac{स्प^{३}प}{३} - \frac{स्पप}{१} + प$$

इन का उत्थापन देने से

$$छे^{४} पताप = प + २ \int स्प^{२} पताप + \int स्प^{४} पताप$$

$$= प + २स्पप - २प + \frac{स्प^{३}प}{३} - स्पप + प = स्पप + \frac{स्प^{३}प}{३}$$

इस लिये $\int_{०}^{\frac{\pi}{४}} छे^{४} पताप = १ + \frac{१}{३} = \frac{४}{३}$ यह सिद्ध हुआ ।

(४) $$\int य^{म}(२अय - य^{२})^{\frac{१}{२}} ताय = - \frac{य^{म-१}(२अय-य^{२})^{\frac{३}{२}}}{म+२} + \frac{अ(२म+१)}{म+२} \int य^{म-१}(२अय - य^{२})^{\frac{१}{२}} ताय$$

ऐसा होगा यदि ३१वें प्रक्रम में (६)वें में आ = —१, अ = २, का = २अ, क = १ और न = $\frac{१}{२}$ मानो । इस लिये यहाँ स्पष्ट है कि यदि य शून्य वा २अ के तुल्य माना जाय तो प्रथम खण्ड शून्य के तुल्य होगा ।

तब $$\int_{०}^{२अ} य^{म}(२अय-य^{२})^{\frac{१}{२}} ताय = \frac{अ(२म+१)}{म+२} \int_{०}^{२अ} य^{म-१} \int (२अय-य^{२})^{\frac{१}{२}} ताय$$

म के स्थान में म−१ का उत्थापन देने से

$$\int_{०}^{२अ} य^{म-१}(२अय-य^{२})^{\frac{१}{२}} ताय = \frac{अ(२म-१)}{म+१} \int_{०}^{२अ} य^{म-२}(२अय-य^{२})^{\frac{१}{२}} ताय$$

यों वार वार क्रिया करने से

$$\int_{०}^{२अ} य^{म-(म-१)}(२अय-य^{२})^{\frac{१}{२}} ताय = \int_{०}^{२अ} य(२अय-य^{२})^{\frac{१}{२}}$$

$$= अ \int_0^{२अ} (२अय-य^२)^{\frac{१}{२}} ताय$$

परन्तु $\int (२अय-य^२)^{\frac{१}{२}} ताय = \int \{ अ^२ - (अ-य)^२ \}^{\frac{१}{२}} ताय$

$$= - \frac{अ-य}{२}\sqrt{२अय-य^२} - \frac{अ^२}{२} ज्या^{-१}\frac{अ-य}{अ}$$

इस लिये $\int_0^{२अ} (२अय-य^२)^{\frac{१}{२}} ताय = + \frac{अ^२\pi}{४} + \frac{अ^२\pi}{४} = + \frac{अ^२\pi}{२}$

इन का उत्थापन देने से

$$\int_0^{२अ} य^म (२अ-य^२)^{\frac{१}{२}} ताय = \frac{अ^{म+२}(२म+१)(२म-१)(२म-३)\cdots १}{(म+२)(म+१)म(म-१)(-२)\cdots ३}\frac{\pi}{२}$$

$$= \frac{१\cdot३\cdot५\cdots(२म+१)}{३.४.५\ldots(म+२)} \frac{\pi.अ^{म+२}}{२}$$ यह सिद्ध हुआ।

(५) $\int_0^{\frac{\pi}{२}} \frac{ताय}{\sqrt{१-ग^२ज्या^२य}}$ इसका क्या मान होगा यदि $ग<१$

यहाँ $\frac{ताय}{\sqrt{(१-ग^२ज्या^२य)}} = ताय(१-ग^२ज्या^२य)^{-\frac{१}{२}}$ इसलिये द्वियुक्पद-सिद्धान्त से $\frac{ताय}{\sqrt{(१-ग^२ज्या^२य)}}$

$$= ताय(१ + \tfrac{१}{२}ग^२ज्या^२य + \frac{१.३}{२.४}ग^४ज्या^४य + \frac{१.३.५}{२.४.६}ग^६ज्या^६य + \ldots)$$

इसलिये $\int \frac{ताय}{\sqrt{(१-ग^२ज्या^२य)}} = य + \frac{ग^२}{२}\int ज्या^२य + \frac{१\cdot३}{२\cdot४}ग^४ \int ज्या^४यताय$

$$+ \frac{१\cdot३\cdot५}{२\cdot४\cdot६}ग^६ \int ज्या^६यताय$$

इस लिये १२ वें प्रक्रम के १५ वें उदाहरण से वा ३५ वें प्रक्रम से

$$\int_0^{\frac{\pi}{२}} \frac{ताय}{\sqrt{(१-ग^२ज्या^२य}} = \frac{\pi}{२} + \frac{ग^२}{२}\int_0^{\frac{\pi}{२}} ज्या^२यताय$$

$$+ \frac{१\cdot३}{२\cdot४}ग^४ \int_0^{\frac{\pi}{२}} ज्या^४यताय + \cdots$$

$$= \frac{\pi}{२}\left\{ १ + (\tfrac{१}{२})^२ग^२ + \left[\frac{१\cdot३}{२\cdot४}\right]^२ ग^४ + \left[\frac{१\cdot३\cdot५}{२\cdot४\cdot६}\right]^२ ग^६ + \cdots \right\}$$

यह सिद्ध हुआ। इस प्रकार से विद्यार्थियों को चाहिये कि अनेक प्रश्नों का उत्तर कर पूर्व प्रक्रमों के सिद्धान्तों से अच्छी तरह परिचय करें।

अभ्यास के लिये प्रश्न।

सिद्ध करो कि

१। $$\int \frac{\text{ताष}}{\text{ज्या}^{\text{म}}\text{षकोज्या}^{\text{न}}\text{प}} = \int \frac{\text{ताप}}{\text{ज्या}^{\text{म}-२}\text{पकोज्या}^{\text{न}}\text{प}} + \int \frac{\text{ताप}}{\text{ज्या}^{\text{म}}\text{पकोज्या}^{\text{न}-२}\text{ष}}$$

२। $$\int \frac{\text{ताष}}{\text{कोज्या}^{\text{न}}\text{ष}} = \frac{\text{ज्याष}}{(\text{न}-१)\text{कोज्या}^{\text{न}-१}\text{प}} + \frac{\text{न}-२}{\text{न}-१} \int \frac{\text{ताप}}{\text{कोज्या}^{\text{न}-२}\text{ष}}$$

३। $$\int \frac{\text{ताष}}{\text{ज्या}^{\text{न}}\text{ष}} = \frac{-\text{कोज्याप}}{(\text{न}-१)\text{ज्या}^{\text{न}-१}\text{ष}} + \frac{\text{न}-२}{\text{न}-१} \int \frac{\text{ताष}}{\text{ज्या}^{\text{न}-२}\text{ष}}$$

४। $$\int \frac{\text{ताष}}{\text{ज्याषकोज्या}^{२}\text{ष}} = \frac{१}{\text{कोज्याष}} + \text{ला स्प}\frac{\text{प}}{२}$$

५। $$\int \frac{\text{ताष}}{\text{ज्याषकोज्या}^{४}\text{ष}} = \int \frac{\text{ज्याषताष}}{\text{कोज्या}^{४}\text{ष}} + \int \frac{\text{ताष}}{\text{ज्यापकोज्या}^{२}\text{ष}}$$

६। $$\int \frac{\text{ताष}}{\text{ज्या}^{३}\text{षकोज्या}^{२}\text{ष}} = \frac{१}{३\text{ज्या}^{३}\text{ष}} - \frac{१}{\text{ज्याष}} + \text{ला}\left\{\text{स्प}\left(\frac{\pi}{२} + \frac{\text{प}}{२}\right)\right\}$$

७। $$\int \frac{\text{ताष}}{\text{ज्या}^{३}\text{ष}} = -\frac{\text{कोज्याप}}{२\text{ज्या}^{२}\text{ष}} + \text{ला}\sqrt{\text{स्प}\frac{\text{प}}{२}}$$

८। $$\int \frac{\text{ताष}}{\text{स्प}^{\text{न}}\text{ष}} = -\frac{१}{(\text{न}-१)\text{स्प}^{\text{न}-१}\text{ष}} - \int \frac{\text{ताष}}{\text{स्प}^{\text{न}-२}\text{प}}$$

९। $$\int \text{स्प}^{४}\text{षताष} = \frac{\text{स्प}^{३}\text{प}}{३} - \text{स्पष} + \text{प}$$

१०। $$\int \frac{\text{ताष}}{\text{स्प}^{५}\text{ष}} = -\frac{१}{४\text{स्प}^{४}\text{ष}} + \frac{१}{२\text{स्प}^{२}\text{ष}} + \text{ला}\ (\text{ज्याष})$$

११। $$\int \text{ज्या}^{३}\text{षकोज्या}^{३}\text{षताप} = -\frac{१}{४}\text{कोज्या}^{४}\text{ष} + \frac{१}{६}\text{कोज्या}^{६}\text{ष}$$

१२। $$\int \frac{\text{ज्या}^{२}\text{षताष}}{\text{कोज्या}^{३}\text{ष}} = \frac{\text{ज्याष}}{२\text{कोज्या}^{२}\text{प}} + \frac{१}{४}\text{ला}\frac{१-\text{ज्याष}}{१+\text{ज्याष}}$$

१३। $$\int_{0}^{२\text{अ}} \text{य}^{५}(२\text{अय}-\text{य}^{२})^{\frac{१}{२}}\text{ताय} = \frac{३३\pi\text{अ}^{७}}{१६}$$

१४। $$\int_{0}^{२\text{अ}} \text{य}^{३}(२\text{अय}-\text{य}^{२})^{\frac{१}{२}}\text{ताय} = \frac{७\pi\text{अ}^{५}}{८}$$

१५। $\int_{0}^{२अ} य(२अय-य^{२})^{\frac{१}{२}}ताय = \frac{\pi अ^{३}}{२}$

१६। यदि $च_{न} = \int \frac{ताय}{(अ+ककोज्याय)^{न}}$ जहाँ न, धन और अभिन्न है तो सिद्ध करो कि

$$(न-१)(अ^{२}-क^{२})च_{न} = -\frac{कज्याय}{त^{न-१}} + अ(२न-३)च_{न-१} - (न-२)च_{न-२}$$

(यहां $त = अ + ककोज्याय$)

१७। सिद्ध करो कि यदि

$$\int (१+ककोज्याय)^{-न}ताय = च_{न} \text{ तो}$$

$$(न-१)(१-क^{२})च_{न} = -कज्याय(१+ककोज्याय)^{-न+१} + (२न-३)च_{न-१} - (न-२)च_{न-२}$$

१८। सिद्ध करो कि

$$\int \frac{ताय}{(अ+ककोज्याय)^{न}} = २\int \frac{(अ-ककोज्या२ष)^{न-१}ताष}{(अ^{२}-क^{२})^{न-\frac{१}{२}}}$$

यदि $स्प\frac{य}{२} = स्पष\sqrt{\frac{अ+क}{अ-क}}$

१९। सिद्ध करो कि यदि न सम हो तो

$$\int कोज्या^{न}षताष = ज्याष\left[\frac{कोज्या^{न-१}}{न} + \frac{न-१}{न(न-२)}कोज्या^{न-३}ष\right] + ज्याष\left[\frac{(न-१)(न-३)}{न(न-२)(न-४)}कोज्या^{न-५}ष + \ldots,\right] + \frac{(न-१)(न-३)(न-५)\ldots\ldots १}{न(न-२)(न-४)\ldots\ldots २}ष$$

और यदि न विषम हो तो

$$\int कोज्या^{न}षताष = ज्याष\left\{\frac{कोज्या^{न-१}}{न} + \frac{न-१}{न(न-२)}कोज्या^{न-३}ष\right\} + ज्याष\left\{\frac{(न-१)(न-३)}{न(न-२)(न-४)}कोज्या^{न-५}ष + \cdots + \frac{(न-१)(न-३)(न-५)\ldots २}{न(न-२)(न-३)\ldots\ldots ३}\right\}$$

२०। सिद्ध करो कि

$$\int ज्या^{२}षउज्या^{म}षताष = \frac{ज्याषउज्या^{म+१}ष}{म+२} + \frac{ष}{म+२} - \frac{म+१}{म+१}ज्याष$$

$$+\frac{म(म+१)}{\lfloor २(म+१)}\left\{\frac{ज्याषकोज्याष}{२}+\frac{प}{२}\right\}$$

$$-\frac{म(म+१)(म-१)}{\lfloor ३(म+२)}\left\{\frac{ज्याषकोज्या^{३}ष}{३}+\frac{२}{३}ज्याष\right\}+\cdots$$

$$+(-१)^{न}\frac{(म+१)(म)\ldots(म-न+२)}{\lfloor न(म+१)}\int कोज्या^{न}पताप$$

२१ । सिद्ध करो कि यदि लाय = ला और $\int\left\{लाय\right\}^{न}य^{म}ताय = च_{न,म}$

तो $च_{न,म} = ला^{न}\frac{य^{म+१}}{म+१}-\frac{न}{म+१}च_{न-१,म}$

२२ । सिद्ध करो कि

$$\int य^{म}\left\{लाय\right\}^{२}ताय=\frac{य^{म+१}}{म+१}\left\{(लाय)^{२}-\frac{२}{म+१}लाय+\frac{२}{(म+१)^{२}}\right\}$$

२३ । सिद्ध करो कि

$$\int\left\{लाय\right\}^{४}य^{७}ताय=\frac{(लाय)^{४}य^{८}}{८}-\frac{४(लाय)^{३}य^{८}}{८^{२}}+\frac{४\cdot३(लाय)^{२}य^{८}}{८^{३}}$$

$$-\frac{४\cdot३\cdot२लायय^{८}}{८^{४}}+\frac{४\cdot३\cdot२य^{८}}{८^{५}}$$

२४ । सिद्ध करो कि

$$\int\frac{ज्या^{म}य}{कोज्या^{न}य}ताय=\frac{ज्या^{म-१}य}{(न-१)कोज्या^{न-१}य}-\frac{म-१}{न-१}\int\frac{ज्या^{म-२}य}{कोज्या^{न-२}य}ताय$$

२५ । सिद्ध करो कि यदि य = २ष तो

$$\int\frac{ज्या^{म}य}{(१+कोज्याय)^{न}}ताय=२^{म-न+१}\int\frac{ज्या^{म}षताप}{कोज्या^{२न-म}ष}$$

२६ । सिद्ध करो कि

$$\int\frac{इ^{मय}}{य^{न}}ताय=-\frac{इ^{मय}}{(न-१)य^{न-१}}+\frac{म}{न-१}\int\frac{इ^{मय}}{य^{न-१}}ताय ।$$

२७ । सिद्ध करो कि

$$\int\frac{इ^{मय}}{य}ताय=लाय+मय+\frac{म^{२}य^{२}}{२\lfloor २}+\frac{म^{३}य^{३}}{३\lfloor ३}+\frac{म^{४}य^{४}}{४\lfloor ४}$$

२८ । $\int_{0}^{२अ}४\sqrt{(२अय-य^{२})}\,उज्या^{-१}\frac{य}{अ}ताय=अ^{२}\pi^{२}$ इसे सिद्ध करो

२९ । $\int_{0}^{अ} १६\sqrt{अ^{२}—य^{२}}\,कोज्या^{-१}\frac{य}{अ}\,ताय = अ^{२}(४ + \pi^{२})$ इसे सिद्ध करो

३० । सिद्ध करो कि

$$स्प^{२न+१}षताष = \frac{स्प^{२न}ष}{२न} - \frac{स्प^{२न-५}ष}{२न—४} + \frac{स्प^{२न-६}ष}{२न—६} - \frac{स्प^{२न-८}ष}{२न—८}$$

$$+ \cdots\cdots + (—१)^{न+१}ला\{कोज्याष\}$$

३१ । सिद्ध करो कि

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{४}} स्प^{५}ष\ ताष = \frac{१}{२}\left\{ ला\,(२)—\frac{७}{१२} \right\}$$

३२ । सिद्ध करो कि

$$\int \frac{ज्या^{३}यताय}{१ + गकोज्याय} = \frac{कोज्या^{२}य}{२ग} - \frac{कोज्याय}{ग^{२}} — \frac{ग^{२}—१}{ग^{३}}ला(१ + गकोज्याय)$$

३३ । सिद्ध करो कि

$$\int_{0}^{१} य^{म}\left\{ लाय \right\}^{२} ताय = \frac{२}{(म + १)^{३}}$$

३४ । सिद्ध करो कि

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \frac{२ग^{३}ज्या^{२}य\ ताय}{१ + गकोज्याय} = (ग^{२}—१)\,ला\,(१ + ग)^{२} + ग\,(२—ग)$$

३५ । सिद्ध करो कि

$$\int(न + १)\,(अ^{२} + य^{२})^{\frac{न}{२}}ताय = य(अ^{२} + य^{२})^{\frac{न}{२}} + नअ^{२}\int(अ^{२} + य^{२})^{\frac{न}{२}-१}ताय$$

३६ । एक लड़का गङ्गाजी के किनारे अ विन्दु पर खड़ा था । उसने ठीक अपने सामने एक मनोहर फूल को जो कि धारा में बहता हुआ चला जाता था देख कर अपने स्थान से गङ्गा में कूद तैर कर फूल लेने के लिये चला । प्रतिक्षण में फूल के बहने के प्रमाण को फूल और अ विन्दु के अन्तर वर्ग से गुणने से जो गुणनफल हो उतना प्रतिक्षण में लड़के के तैरने का प्रमाण है तो बताओ कि जिस समय अ विन्दु के सामने से धारा में वह फूल ९ हाथ वह गया उस समय अ विन्दु से लड़का कितना तैर कर गया होगा। इस प्रश्न में इतना हम जानते हैं कि अ विन्दु से धारा का अन्तर १५ हाथ है । 　　　उ० २२६८

इति तृतीयाध्याय ।

चतुर्थाध्याय।

प्रकीर्णक।

३८। कल्पना करो कि

(१) $\text{फ}(\text{य}) = \text{य}$ तो

$\text{फ}(\text{अ}) = \text{अ}$, $\text{फ}(\text{अ} + \text{च}) = \text{अ} + \text{च}$, $\text{फ}(\text{अ} + २\text{च}) = \text{अ} + २\text{च} + . \ \ldots\ldots$

इस लिये

$$\text{च फ}(\text{अ}) + \text{च फ}(\text{अ}+\text{च}) + \text{च फ}(\text{अ}+२\text{च}) + \ldots \ \text{च फ}(\text{अ}+\text{न च})$$

$$= \text{च} \{ \text{अ} + (\text{अ}+\text{च}) + (\text{अ}+२\ \text{च}) + \ldots (\text{अ}+\text{न च}) \}$$

$$= \text{च} \{ \text{अ}(\text{न}+१) + \text{च}(१+२+३\ldots\text{न}) \} - \text{च} \{ \text{अ}(\text{न}+१) + \tfrac{\text{चन}}{२}(\text{न}+१) \}$$

$$= \text{च}(\text{न}+१)\left(\tfrac{२\text{अ}+\text{नच}}{२}\right) = (\text{अ}+\text{अ}+\text{नच})\tfrac{\text{च}(\text{न}+१)}{२} = \tfrac{\text{च}(\text{न}+१)}{२}(\text{अ}+\text{क}) \quad \ldots.(१)$$

यदि $\text{अ} + \text{न च} = \text{क}$ परन्तु यदि $\text{अ} + \text{नच} = \text{क}$ तो $\text{च} = \frac{\text{क}-\text{अ}}{\text{न}}$ इस का

उत्थापन देने से (१) का

मान $= \frac{\text{क}-\text{अ}}{२}\left(१+\frac{१}{\text{न}}\right)(\text{अ}+\text{क})$ इस में यदि $\text{च} = ०$ वा $\text{न} = \frac{१}{०}$ तो

इस का मान $= \dfrac{\text{क}^२ - \text{अ}^२}{२}$ यह सिद्ध हुआ।

परन्तु जब $\text{फ}(\text{य}) = \text{य} \ \therefore \int \text{फ}(\text{य})\text{ताय} = \int \text{यताय} = \dfrac{\text{य}^२}{२}$

इस लिये $\int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ}(\text{य})\text{ताय} = \dfrac{\text{क}^२ - \text{अ}^२}{२}$ (२) प्रक्रम देखो

(२) $\text{फ}(\text{य}) = \text{य}^२$ तो

$$\text{च फ}(\text{अ}) + \text{च फ}(\text{अ}+\text{च}) + \text{चफ}(\text{अ}+२\text{च}) + \cdots \text{चफ}(\text{अ}+\text{नच})$$

$$= \text{च अ}^२ + \text{च}(\text{अ}+\text{च})^२ + \cdots \text{च}(\text{अ}+\text{नच})^२$$

$$= \text{च} \{ \text{अ}^२ + (\text{अ}^२ + २\ \text{अच} + \text{च}^२) + \cdots (\text{अ}^२ + २\text{अनच} + \text{न}^२\text{च}^२) \}$$

$$= \text{च} \{ \text{अ}^२(\text{न}+१) + २\text{अच}(१+२+३+\cdots\text{न}) + \text{च}^२(१^२+२^२+३^२+\cdots+\text{न}^२) \}$$

$$= \text{च} \left\{ \text{अ}^२(\text{न}+१) + \text{अचन}(\text{न}+१) + \frac{\text{च}^२\text{न}(\text{न}+१)}{२} \cdot \frac{(२\text{न}+१)}{३} \right\}$$

$$= \text{च}(\text{न}+१) \left\{ \text{अ}^२ + \text{अचन} + \text{च}^२\text{न}\frac{२\text{न}+१}{६} \right\}$$

$$= (\text{क}-\text{अ})\left(१+\tfrac{१}{\text{न}}\right) \{ \text{अ}^२ + \text{कअ} - \text{अ}^२ + (\text{क}-\text{अ})\left(\tfrac{\text{क}-\text{अ}}{\text{न}}\right)\left(\tfrac{२\text{न}+१}{६}\right) \}$$

$$= (\text{क}-\text{अ})\left(१+\tfrac{१}{\text{न}}\right) \{ \text{कअ} + (\text{क}+\text{अ})^२\left(\tfrac{१}{३}+\tfrac{१}{६\text{न}}\right) \}$$

$$= (क—अ)\left\{ कअ + \frac{(क-अ)^२}{३} \right\} = (क-अ)\left[\frac{क^२ + कअ + अ^२}{३}\right] = \frac{क^३—अ^३}{३}$$

परन्तु $फ(य) = य^२ \therefore \int फ(य)ताय = \int य^२ ताय = \frac{य^३}{३}$

इस लिये $\int_{अ}^{क} फ(य)\, ताय = \frac{क^३-अ^३}{३}$, इस तरह से (२) प्रक्रम की परिभाषा से स्वतन्त्रराशि के दो मानों के भीतर का चलानयन बीजगणित की युक्ति से श्रेढ़ियों के योग पर से कर सकते हैं। परन्तु जहाँ श्रेढ़ियों के योग करने की रीति नहीं जानी जाती वहाँ इस रीति से सान्तचल का मान जानना कठिन है।

जैसे यदि $फ(य) = लाय$ तो

$$च फ(अ) + चफ(अ + च) + चफ(अ + २च) + चफ(अ + ३च) + \cdots$$
$$+ चफ\{अ + च(न—१)\} = च[ला(अ) + ला(अ + च) + ला(अ + २च)$$
$$+ ला(अ + ३च) + \cdots + ला\{अ + च(न—१)\}]$$

यहां हम लोग अब लाचार हैं कि कैसे इस श्रेढी का योग करें परन्तु जब (२) प्रक्रम से स्पष्ट है कि इस श्रेढी का योग अवश्य

$\int_{अ}^{क} फ(य)ताय = \int_{अ}^{क} ला\,(य)\, ताय$ यह होगा। इसलिये ऐसे ऐसे स्थानों में सान्तचलानयन से श्रेढी के योग का पता लग सकता है।

जैसे इसी स्थान में जब प्रसिद्ध है कि $\int लायताय = य\, लाय—य$ तब $\int_{अ}^{क} लायताय = ला\left[\frac{क^क}{अ^अ}\right]—(क—अ)$ यही ऊपर के श्रेढ़ी का योग होगा।

३९। इस प्रक्रम में ऊपर के प्रक्रम को अच्छी तरह से समझने के लिये कुछ उदाहरण दिखाते हैं।

(१) $\frac{१}{\sqrt{१—य^२}} = फ(य)$ इस में श्रेढी के योग पर से $\int_{०}^{१} \frac{ताय}{\sqrt{१—य^२}}$

इसका मान जानना है यहाँ, $चफ(०) + चफ(च) + चफ(२च) + चफ(३च) + \cdots + चफ(१)$

$$= \left[\frac{च}{१} + \frac{च}{\sqrt{१—च^२}} + \frac{च}{\sqrt{१—४च^२}} + \frac{च}{\sqrt{१—९च^२}} + \cdots + \frac{च}{\sqrt{१—१^२}}\right]$$

$$= \frac{१}{\frac{1}{च}} + \frac{१}{\sqrt{\frac{1}{च^2}-1}} + \frac{१}{\sqrt{\frac{1}{च^2}-४}} + \frac{१}{\sqrt{\frac{1}{च^2}-९}} + \cdots\cdots$$

$$\frac{1}{न} + \frac{१}{\sqrt{न^2-१}} + \frac{१}{\sqrt{न^2-४}} + \frac{१}{\sqrt{न^2-९}} + \cdots$$ क्योंकि यहाँ

नच=१. $\therefore$ च=$\frac{1}{न}$ परंतु चलज्ञान से $\int_0^1 \frac{ताय}{\sqrt{१-य^2}} = \frac{\pi}{२}$

इस लिये यदि न का मान अनन्त हो तो

$$\int_0^1 \frac{ताय}{\sqrt{१-य^2}} = \frac{\pi}{२} = \frac{1}{न} + \frac{१}{\sqrt{न^2-१}} + \frac{१}{\sqrt{न^2-४}} + \frac{१}{\sqrt{न^2-९}} + \cdots$$ यह सिद्ध हुआ

(२) $\int_0^1 \frac{ताय}{१+य^2}$ इसका मान श्रेढ़ी में जानना है।

(२) प्रक्रम से

$$\int_0^1 \frac{ताय}{१+य^2} = \frac{च}{१} + \frac{च}{१+च^2} + \frac{च}{१+४च^2} + \frac{च}{१+९च^2} + \cdots + \frac{च}{१+१^2}$$

$$= \frac{१}{न}\left\{ १ + \frac{१}{१+(\frac{1}{न})^2} + \frac{१}{१+(\frac{२}{न})^2} + \frac{१}{१+(\frac{३}{न})^2} + \cdots\cdots \right\}$$

परन्तु चलानयन के प्रकार से $\int_0^1 \frac{ताय}{१+य^2} = \frac{\pi}{२}$, इस लिये यदि ऊपर की

श्रेढी में न अनन्त हो तो श्रेढ़ी का योग $\frac{\pi}{२}$ होगा।

(३) च[ज्याअ + ज्या(अ + च) + ज्या(अ + २च) + $\cdots$ + ज्या { अ + (न—१) च }]

इस में यदि न का मान अनन्त हो तो श्रेढी के योग का मान जानना है।

यहाँ त्रिकोणमिति की रीति से ऊपर की श्रेढी का योग

$$= \frac{चज्या(अ + \frac{न-1}{२}च)ज्या\frac{नच}{२}}{ज्या\frac{च}{२}} = \frac{चज्या(अ + \frac{क-अ}{२} - \frac{च}{२})ज्या\frac{क-अ}{२}}{ज्या\frac{च}{२}}$$, यदि अ + नच = क

अब यहाँ यदि च = ० तो $\frac{च}{ज्या\frac{च}{२}} = २ \frac{\frac{च}{२}}{ज्या\frac{च}{२}} = २$ इस लिये श्रेढी का योग

२ज्या $\frac{क+अ}{२}$ ज्या $\frac{क-अ}{२}$ = कोज्याअ-कोज्याक = $\int_अ^क$ ज्यायताय यह सिद्ध हुआ।

इसी श्रेढी में यदि न के स्थान में न + १ का उत्पादन दें तो श्रेढी का योग

$= \text{च}\text{ज्या}(\text{अ} + \frac{\text{नच}}{२})\text{ज्या}\frac{\text{न}+१}{२}\text{च} - \text{ज्या}\frac{\text{च}}{२} = \frac{२\text{च}}{\text{ज्या}\frac{\text{च}}{२}}\text{ज्या}(\text{अ} + \frac{\text{क}-\text{अ}}{२})\text{ज्या}\left[\frac{\text{क}-\text{अ}}{२} + \frac{\text{च}}{२}\right]$

$= २\text{ज्या}(\frac{\text{क}+\text{अ}}{२})\text{ज्या}\frac{\text{क}-\text{अ}}{२} = \text{कोज्या}\text{अ} - \text{कोज्या}\text{क}$, यदि च = ०

इसलिये श्रेढी में यदि एक पद बढ़ भी जाय तौ भी योग वही रहेगा।

४०। २ प्रक्रम से और ३९ प्रक्रम के उदाहरणों से स्पष्ट होता है कि

$\int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ}(\text{य})\text{ताय}$ यह $\text{च}_१\text{फ}(\text{अ}) + \text{च}_२\text{फ}(\text{य}_१) + \cdots + \text{च}_\text{न}\text{फ}(\text{य}_{\text{न}-१})$ इस श्रेढी

के योग तुल्य है यदि श्रेढी में न का मान अनन्त कल्पना किया जाय

जहाँ $\text{च}_२ = \text{य}_१ - \text{अ}_१ = ०$, $\text{च}_३ = \text{य}_२ - \text{य}_१, = ०, \cdots$ और $\text{य}_{\text{न}-१} = \text{क} - \text{च}_\text{न}$

मानो कि अ, क के भीतर फ(य) के जितने मान हैं वे सब उत्तरोत्तर घटते वा बढ़ते हैं और उन में सब से बड़ा आ और सब से छोटा का है तो सब फलों के स्थान में आ और का का उत्थापन देने से आ $(\text{च}_१ + \text{च}_२ + \text{च}_३ + \cdot + \text{च}_\text{न})$ यह पहली श्रेढी से बड़ा होगा और का $(\text{च}_१ + \text{च}_२ + \text{च}_३ + \cdots + \text{च}_\text{न})$ यह छोटा। परन्तु $\text{च}_\text{न} + \text{च}_२ + \cdots + \text{च}_\text{न} = \text{क} - \text{अ}$ इस लिये ऊपर के श्रेढी का मान आ (क—अ) और का (क—अ) के बीच में होगा।

इस लिये निश्चय है कि श्रेढी का मान (क—अ)गा इसके तुल्य होगा जहां गा एक ऐसी संख्या है जिसका मान आ और का के बीच में है परंतु फ(य) को घटते वा बढ़ते माना है इस लिये अवश्य कोई य के मान में यह गा के तुल्य होगा। मानो कि गा = फ { अ + ष(क—अ) } जहां ष कोई रूपाल्प संख्या है।

इस लिये श्रेढी का योग $= \int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ}(\text{य})\text{ताय} = (\text{क} - \text{अ})\,\text{फ}\{\text{अ} + \text{ष}(\text{क} - \text{अ})\}$

इसी प्रकार फ(य) फा(य)ताय इसमें फ(य) तो पहले ही के ऐसा समझो और वैसाही फा(य) को भी समझो तो पूर्व ही की रीति से

$\int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ}(\text{य})\text{फा}(\text{य})\text{ताय} = \text{च}_१\text{फ}(\text{अ})\text{फा}(\text{अ}) + \text{च}_२\text{फ}(\text{य}\ )\ \text{फा}(\text{य}_१) + \cdots +$

$\text{च}_\text{न}\text{फ}(\text{य}_{\text{न}-१})\text{फा}(\text{य}_{\text{न}-१})$.

यहां भी पूर्व ही की रीति से सिद्ध कर सकते हो कि यह श्रेढी आ $\{\text{च}_१\text{फा}(\text{अ}) + \text{च}_२\text{फा}(\text{य}_१) + \text{च}_३\text{फा}(\text{य}_२) + \cdots + \text{च}_\text{न}\text{फा}(\text{य}_{\text{न}-१})\}$ इससे छोटी और का $\{\text{च}_१\text{फा}(\text{अ}) + \text{च}_२\text{फा}(\text{य}_१) + \text{च}_३\ \text{फा}(\text{य}_२) + \cdots \text{च}_\text{न}\text{फा}(\text{य}_{\text{न}-१})\}$ इस से बड़ी होगी।

इस लिये यहां भी मानो कि फ(य) के गा मान में वास्तव श्रेढी का योग = गा $\{$ च$_१$फा(अ) + च$_२$फा(य$_१$) + च$_३$फा(य$_२$) + $\cdots$ + च$_न$फा(य$_{न-१}$) $\}$

$= गा \int_{अ}^{क} फा(य)ताय = फ \{ अ + ष(क—अ) \} \int_{अ}^{क} फा(य) ताय$

$= \int_{अ}^{क} फ(य)फा(य)ताय$ यह सिद्ध होता है।

यहां इसका कुछ नियम नहीं कि $\int_{अ}^{क}$फ(य)ताय इसके मान में जो

फ $\{$ अ + ष(क—अ) $\}$ इसमें ष है वही $\int_{अ}^{क}$फ(य)फा(य)ताय इसके मान में भी हो इतना अवश्य नियम है कि ऐसे स्थानों में ष सर्वत्र रूपाल्प संख्या है।

४१। सान्तचलानयन से स्पष्ट है कि यदि $\int$फ(य)ताय = फा(य) तो

$$\int_{अ}^{ग} फ(य)ताय = फा(ग)—फा(अ)$$

$$\int_{ग}^{क} फ(य)ताय = फा(क)—फा(ग)$$

इस लिये $\int_{अ}^{ग}$फ (य)ताय + $\int_{ग}^{क}$फ(य) ताय = फा(क)

—फा(अ) = $\int_{अ}^{क}$फ(य) ताय, ... (१)

इसी प्रकार यह भी सिद्ध कर सकते हो कि

$\int_{अ}^{क}$फ(य)ताय = — $\int_{क}^{अ}$फ(य) ताय . . . . (२)

यदि $\int$फ(य)ताय इस में य के स्थान में अ—ल इस का उत्थापन दें तो अ—ल = य $\therefore$ अ—य = ल, —ताय = ताल,

इस लिये $\int$फ(अ—य)ताय = —$\int$फ(ल)ताल

और $\int_{अ}^{क}$ (अ—य) ताय = —$\int_{०}^{अ-क}$फ(ल)ताल = $\int_{अ-क}^{०}$ फ(ल)ताल, (२) से

मानो कि $\int$फ(ल)ताल = फा(ल) इस लिये

$\int_{अ}^{क}$फ (ल)ताल = फा(क)—फा(अ) = $\int^{क}$ फ(य)ताय

इस लिये $\int_{अ}^{क}$ (अ—य)ताय = $\int_{अ-क}^{०}$ फ(य)ताय . . . . (३)

(३) में मानो कि क = ० तो $\int_{अ}^{०}$ फ(अ—य) = $\int_{अ}^{०}$फ(य)ताय

इस लिये (२) से $\int_{०}^{अ}$ फ(अ—य)ताय = $\int_{०}^{अ}$ फ(य)ताय . . . . . (४)

इसी प्रकार यदि य = २अ—र तो ताय = —तार और र = २अ—य

इस लिये $\int$ फ(य) ताय = —$\int$ फ(२ अ—र) तार

और $\int_{अ}^{२अ}$ फ(य) ताय = — $\int_{अ}^{०}$ फ(२अ—र)तार = $\int_{०}^{अ}$ फ(२अ—र)तार

परन्तु (३) की युक्ति से $\int_{०}^{अ}$ फ(२अ—र)तार = $\int_{०}^{अ}$ फ (२अ—य)ताय

इस लिये $\int_{अ}^{२अ}$ फ(य)ताय = $\int_{०}^{अ}$ फ(२अ—य) ताय

और (१) से $\int_{०}^{२अ}$ फ(य)ताय = $\int_{०}^{अ}$ फ(य) ताय + $\int_{अ}^{२अ}$ फ(य) ताय

इस लिये $\int_{०}^{२अ}$ फ(य)ताय = $\int_{०}^{अ}$ फ(य)ताय + $\int_{०}^{अ}$ फ(२अ—य) $\cdots\cdots$ (५)

(५) वें में यदि य के ० और अ के बीच सब मानों में फ (य) = फ(२अ—य)

तो $\int_{०}^{२अ}$ फ(य) ताय = २ $\int_{०}^{अ}$ फ(य) ताय $\cdots\cdots\cdots$ (६)

और यदि य के ० और अ के बीच सब मानों में—फ(य) = फ(२अ—य)

तो $\int_{०}^{२अ}$ फ(य)ताय = ० $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (७)

जैसे यदि फ(य) = ज्या^{म}य तो फ(π—य) = ज्या^{म}(π—य) = ज्या^{म}य

त्रिकोणमिति से

$$\text{इस लिये} \int_{०}^{२अ} \text{फ(य)ताय} = \int_{०}^{\pi} \text{फ(य)ताय} = २\int_{०}^{अ} \text{फ(य)ताय}$$

$$= २\int_{०}^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{म}\text{य ताय} = \int_{०}^{\pi} \text{ज्या}^{म}\text{य ताय} \cdots\cdots\cdots\cdots (६) \text{ से}$$

और जब त्रिकोणमिति से स्पष्ट है कि कोज्याय = —कोज्या (π—य)

इस लिये यदि म विषम संख्या हो और फ(य) = कोज्या^{म}य तो (७) से

सिद्ध कर सकते हो कि $\int_{०}^{२अ}$ फ(य)ताय $\int_{०}^{\pi}$ कोज्या^{म}यताय = ०

(२) प्रक्रम से यदि $\int_{०}^{\pi}$ ज्या^{म}यताय इसका मान श्रेढी में लावो तो

च { ज्या^{म}च + ज्या^{म}२च + ज्या^{म}३च + $\cdots$ + ज्या^{म}(न-१)च } ऐसा होगा

जहाँ नच = π

यहाँ स्पष्ट देख पड़ता है कि ज्या^{म}च = ज्या^{म}(न-१)च = ज्या^{म}(π—च) = ज्या^{म}च,

ज्या^{म}२च = ज्या^{म}(न—२)च = ज्या^{म}(π—२च) = ज्या^{म}२च, इसी तरह और भी दिखा सकते हो कि दो दो पद तुल्य आवेंगे इस लिये इस पर से भी सिद्ध कर सकते हो कि $\int_{0}^{\pi}$ ज्या^{म}यताय = २$\int_{0}^{\frac{\pi}{२}}$ ज्या^{म}यताय ।

इसी तरह से यह भी सिद्ध कर सकते हो कि $\int_{0}^{\pi}$ कोज्या^{म}यताय = ०

यदि म विषम हो

यदि अ से क बड़ा हो और य के अ और क के बीच किसी मान में फ(य) सर्वदा धनात्मक हो तो स्पष्ट है कि $\int_{अ}^{क}$फ(य)ताय इसका मान जो (२) प्रक्रम से श्रेढी में आता है उस में प्रत्येक पद धनात्मक ही रहेंगे इस लिये श्रेढी का योग अर्थात् $\int_{अ}^{क}$ फ(य)ताय यह सर्वदा धनात्मक ही होगा ।

४२। ऊपर के प्रक्रमों में सान्तचल के लिये जो कुछ वर्णन किया गया है वह सब तभी ठीक दिखा सकते हो जब फल अर्थात् जिस का चल ज्ञान करना है, अ और क के बीच स्वतन्त्र राशि के मानों में सान्त हो और यदि अ, और क के बीच किसी स्वतन्त्र राशि के मान में फल अनन्त के तुल्य हो तो ऊपर की विधि से अर्थात् श्रेढी की विधि से सिद्ध होता है कि सान्तचल ज्ञान नहीं हो सकता। ऐसी स्थिति में अवश्य परीक्षा करनी चाहिये ।

जैसे चलानयन से सिद्ध है कि $\int \frac{\text{ताय}}{(१—\text{य})^{२}} = \frac{१}{१—\text{य}}$ इस लिये

$\int_{0}^{२} \frac{\text{ताय}}{(१—\text{य})^{२}} = \frac{१}{१—२} — \frac{१}{१—०} = —१—१ = —२$ यह मान आया

परन्तु $\int_{0}^{२} \frac{\text{ताय}}{(१—\text{य})^{२}}$ इस का मान यदि (२) प्रक्रम से श्रेढी में ले आवो

तो च $\left\{ \frac{१}{(१—०)^{२}} + \frac{१}{(१—\text{च})^{२}} + \cdots \right\}$ ऐसा होगा ।

इस में स्पष्ट है कि प्रत्येक पद धनात्मक है इस लिये श्रेढी का योग अर्थात् $\int_{0}^{२} \frac{\text{ताय}}{(१—\text{य})^{२}}$ यह धनात्मक ही होगा। इस कारण पहले सान्तचलानयन से —२ यह मान सिद्ध हुआ अशुद्ध ठहरा। यहां ० और २ के बीच य का मान १ के तुल्य मानो तो $\frac{१}{१—\text{य}^{२}}$ यह अनन्त के तुल्य होता है।

इसी प्रकार $\int_0^{अ} \frac{ताय}{\sqrt{१—य}} = २—२\sqrt{१—अ}$ यह सान्तचलानयन से सिद्ध होता है परन्तु यहां यदि य = १ तो $\frac{१}{\sqrt{१—य}}$ यह अनन्त के तुल्य होता है। इस लिये यहां ऐसा कहना पड़ेगा कि $\int_0^{अ} \frac{ताय}{\sqrt{१—य}}$ इसका मान सान्त होगा यदि अ $<$१ हो तो। और अ का मान जैसा जैसा १ के पास होता जायगा तैसा तैसा $\int_0^{अ} \frac{ताय}{\sqrt{१—य}}$ यह २ के पास पास आवेगा।

४३। (२) प्रक्रम में $\int_{अ}^{क}$ फ(य)ताय इस के मान में क, और अ दोनों को जो फ(य) के ऐसा सान्त कल्पना किया है वह सर्वदा ठीक नहीं कभी एक कभी दोनों विशेष स्थल में अनन्त के भी समान हो सकते हैं।

जैसे $\int \frac{ताय}{१+य^२} =$ स्प$^{-१}$य इस लिये $\int_0^{अ} \frac{ताय}{१+य^२} =$ स्प$^{-१}$अ यहां स्पष्ट है कि ज्यों ज्यों अ का मान बढ़ता जायगा त्यों त्यों स्प$^{-१}$अ का मान $\frac{\pi}{२}$ के पास पास होगा इस लिये यदि अ = ∞ तो स्प$^{-१}$अ = $\frac{\pi}{२}$ ऐसा होगा इस लिये $\int_0^{\infty} \frac{ताय}{१+य^२} = \frac{\pi}{२}$ यह सिद्ध हुआ।

इसी प्रकार $\int \frac{ताय}{१+य} =$ ला (१+य)

इस लिये $\int_0^{अ} \frac{ताय}{१+य} =$ ला (१+अ) यहां भी स्पष्ट है कि ज्यों ज्यों अ का मान बढ़ेगा त्यों त्यों ला (१+अ) का भी मान बढ़ेगा इस लिये यदि अ = ∞ तो ला (१+अ) = $\infty \therefore \int_0^{\infty} \frac{ताय}{१+य} = \infty$ यह सिद्ध होता है।

४४। कल्पना करो कि फ(य) का मान अनन्त होता है यदि य = ग जहां ग, अ और क के बीच में है तो (४२) प्रक्रम से स्पष्ट है कि यहां $\int_{अ}^{क}$ फ(य) ताय इसका मान साधारण सान्त चलानयन से ठीक नहीं

आवेगा इस लिये पहले यहां $\int_{अ}^{ग-इ_1}$ फ(य)ताय + $\int_{ग+इ_1}^{क}$ फ(य) ताय

इस का मान ले आवो इस में $इ_1$ का मान शून्य मानने से (४१) प्रक्रम के (१) समीकरण से

$$\int_{अ}^{क} फ(य)ताय = \int_{अ}^{ग-इ_1} फ(य)ताय + \int_{ग+इ_1}^{क} फ(य)ताय$$

यह सिद्ध हो जायगा ।

जैसे यदि $फ(य) = \frac{१}{ग-य}$ तो $\int फ(य)ताय = -ला(ग-य)$

इस लिये $\int_{अ}^{ग-इ_1} फ(य)ताय = -ला\{ग-(ग-इ_1)\}$

$$-\{-ला(ग-अ)\} = ला\frac{ग-अ}{इ_1}$$

इसी तरह $\int_{ग+इ_1}^{क} फ(य)ताय = \int_{ग+इ_1}^{क}\frac{ताय}{ग-य} = -\int_{ग+इ_1}^{क}\frac{ताय}{य-ग}$

$= -\int ला\frac{क-ग}{इ_1}$ इस लिये दोनों का योग = $ला\frac{ग-अ}{इ_1} - ला\frac{क-ग}{इ_1}$

$= ला\frac{ग-अ}{क-ग} = \int_{अ}^{क}\frac{ताय}{ग-य}$ क्योंकि यहाँ $इ_1 = ०$ मानने से भी $ला\frac{ग-अ}{क-ग}$ में कुछ विकार न होगा ।

ऐसे मान को क्वासी (Cauchy) साहब ने $\int_{अ}^{क}$फ(य)ताय इसका मुख्य मान यह नाम रखा है ।

४५ । $\int\frac{ताय}{अ^2+य^2}$ इस का मान सिद्ध है कि $\frac{१}{अ}स्प^{-1}\frac{य}{अ}$ यह होगा इस लिये $\int$ यहां यदि य = स्पष तो ताय = छे^{2}षताष तब

$$\int\frac{ताय}{अ^2+य^2} = \int\frac{छे^2षताष}{अ^2+स्प^2ष} = \frac{१}{अ}स्प^{-1}\left[\frac{स्पष}{अ}\right]$$

यहां यदि ष = ० और π हो तो $\int_{0}^{\pi}\frac{छे^2षताष}{अ^2+स्प^2ष}$ इस का मान

$$\frac{१}{अ}स्प^{-1}\left(\frac{स्प\pi}{अ}\right) - \frac{१}{अ}स्प^{-1}\left(\frac{स्प०}{अ}\right) = स्प^{-1}(०) - स्प^{-1}(०)$$

देखो यहाँ दोनों खण्डों का रूप एक ही है इस लिये बहुधा भ्रान्ति से जो लोग कि सान्तचलानयन में निपुण नहीं हैं दोनों मानों को समान मान उत्तर शून्य के तुल्य कहेंगे जो कि वास्तव में अशुद्ध है क्योंकि यदि सान्तचल का रूप (२) प्रक्रम से श्रेढ़ी में ले आवो तो

$$\frac{च}{अ^२} + \frac{चछे^२च}{अ^२ + स्प^२च} + \frac{चछे^२२च}{अ^२ + स्प^२२च} + \cdots \frac{चछे^२(न-१)च}{अ^२ + स्प^२(न-१)च}$$

यह होगा जिस में स्पष्ट है कि प्रत्येक पद धन हैं इस लिये श्रेढ़ी का योग अर्थात् $\int_0^\pi \frac{छे^२षताष}{अ^२ + स्प^२ष}$ यह कोई धनात्मक संख्या है। यही ४१वें प्रक्रम के अन्त्य वाक्य से भी सिद्ध कर सकते हो कि यहाँ सान्तचल का मान अवश्य धनात्मक संख्या होगी।

इस लिये यहाँ पर विचार करना चाहिये कि वास्तव में ष के ० और π मान में $स्प^{-१}\left(\frac{स्पष}{अ}\right)$ का क्या मान होगा। कल्पना करो कि ०, $ष_१$, $ष_२$ $ष_३$, ...$ष_न$, π यह एक श्रेढ़ी है जहाँ उत्तरोत्तर अधिक पद हैं और $\frac{छे^२ष}{अ^२ + स्प^२ष} = र$ तो (४१) वें प्रक्रम के (१) समीकरण से

$$\int_0^\pi \frac{छे^२षताष}{अ^२ + स्प^२ष} = \int_0^\pi रताष = \int_0^{ष_१} रताष + \int_{ष_१}^{ष_२} रताष + \int_{ष}^{ष_३} रताष + \cdots$$

$$+ \int_{ष_{न-१}}^{ष_न} रताष + \int_{ष_न}^{\pi} रताष$$

यहाँ स्पष्ट है कि न का मान अधिक करने से $ष_इ$ और $ष_{इ+१}$ के अन्तर को चाहे जितना छोटा कर सकते हो इस लिये

$$\int_{ष_इ}^{ष_{इ+१}} रताष = स्प^{-१}\left[\frac{स्पष_{इ+१}}{अ}\right] - स्प^{-१}\left[\frac{स्पष_इ}{अ}\right]$$ यह अवश्य शून्य के तुल्य हो सकता है यदि $ष_{इ+१} - ष_इ = ०$

इस पर से सिद्ध होता है कि ज्यों ज्यों ष का मान बढ़ेगा त्यों त्यों $स्प^{-१}\left(\frac{स्पष}{अ}\right)$ इस का भी मान बढ़ता जायगा इस लिये ष के ० मान से π मान तक एक बार यह भी बढ़ कर $\frac{न\pi}{२}$ इस मान के पार हो जायगा। जहाँ न कोई विषम संख्या है इस लिये यदि ष के शून्य मान में

$स्प^{-१}\left(\frac{स्पष}{अ}\right)$ इस का मान नπ मानो तो ष के π मान में $स्प^{-१}\left(\frac{स्पष}{अ}\right)$ इस का मान $(न+१)\pi$ अवश्य मानना पड़ेगा इस लिये

$$\int_{०}^{\pi}\frac{छे^{२}पताष}{अ^{२}+स्प^{२}ष}$$

$$=\frac{१}{अ}\left\{स्प^{-१}\left[\frac{स्प\pi}{अ}\right]-स्प^{-१}\left[\frac{स्प०}{अ}\right]\right\}=\frac{१}{अ}\left\{स्प^{-१}(०)-स्प^{-१}(०)\right\}$$

$$=\frac{१}{अ}\left\{(न+१)\pi-न\pi\right\}=\frac{\pi}{अ}$$ यह सच्चा उत्तर होगा ।

अथवा $\frac{१}{अ}स्प^{-१}\left(\frac{स्पष}{अ}\right)$ इस में मानो कि $स्प^{-१}\left(\frac{स्पष}{अ}\right)=षा$

$\therefore स्पषा=\frac{१}{अ}स्पष$ अब चलनकलन के (३०४) प्रक्रम के (१) समीकरण से

यदि $म=न=\frac{१}{अ}$ और $म=\frac{अ-१}{अ+१}$ तो

$$षा=ष-मज्या२ष+\frac{म^{२}}{२}ज्या४ष-\frac{म^{३}}{३}ज्या६ष+\cdots\cdots$$ ऐसा होगा

इस का उत्थापन चल मान में देने से

$$\int\frac{छे^{२}षताष}{अ^{२}+स्प^{२}ष}=\frac{१}{अ}\left(ष-मज्या२ष+\frac{म^{२}}{२}ज्या४ष-\frac{म^{३}}{३}ज्या६ष+\cdots\right)$$ ऐसा हुआ

इस में ष का मान शून्य और π मानो तो स्पष्ट है कि

$$\int_{०}^{\pi}\frac{छे^{२}षताष}{अ^{२}+स्प^{२}ष}=\frac{१}{अ}\left(\pi-मज्या२\pi+\frac{म^{२}}{२}ज्या४\pi-\frac{म^{३}}{३}ज्या६\pi+\cdots\right)$$

$$-\frac{१}{अ}\left(०-मज्या०+\frac{म^{२}}{२}ज्या०-\frac{म^{३}}{३}ज्या०+\cdots\right)$$

$$=\frac{\pi}{अ}-०=\frac{\pi}{अ}$$ यह बड़े लाघव से सिद्ध हुआ ।

पहली क्रिया जो दिखलाई गई है उसे टाड्हण्टर (Todhunter) साहब ने अपने चलराशिकलन (Integral Calculus) के ४६वें प्रक्रम में लिखा है। और दूसरी क्रिया से $\frac{१}{अ}स्प^{-१}\frac{स्पष}{अ}$ इस का मान जो दिखलाया है वह मेरी कल्पना है ।

इसी प्रकार दोनों सीमाओं के भीतर वास्तव में क्या मान है इसकी परीक्षा के लिये विद्यार्थियों को चाहिये कि बड़ी सावधानी से क्रिया करें क्योंकि ऐसे स्थानों में बहुधा संशयात्मक मान पड़ जाते हैं जिनका ठीक विचार न करने से

तुरन्त मान में अशुद्धि हो जाती है।

इस विषय पर एक और उदारण दिखाते हैं।

चलानयन से सिद्ध है कि $\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{अ}^2 - \text{य}^2}} = \text{ज्या}^{-१} \frac{\text{य}}{\text{अ}}$, इस लिये

$$\int_{-\text{अ}}^{\text{अ}} \frac{\text{ताय}^{-१}}{\sqrt{\text{अ}^2 - \text{य}^2}} = \text{ज्या}^{-१}(+१) - \text{ज्या}^{-१}(-१)$$ यह संशयात्मक हुआ

क्योंकि त्रिकोणमिति से सिद्ध है कि

ज्या $\{(४\text{म}+१)\frac{\pi}{२}\} = +१$ और ज्या $\{(४\text{न}-१)\frac{\pi}{२}\} = -१$ जहाँ म और न कोई अभिन्न संख्या हैं। इस लिये म और न का भिन्न-भिन्न मान मानने से अनेक मान आ सकते हैं।

इस संशय को दूर करने के लिये विचारो कि—अ से बढ़ते बढ़ते जब य, +अ के तुल्य होगा तो निश्चय है कि एक वार शून्य के तुल्य होगा इस लिये ज्या$^{-१}$(—१) यह बढ़ते बढ़ते जब ज्या$^{-१}$(+१) इसके तुल्य होगा तो अवश्य इस का एक ही मान ज्या$^{-१}$ (०) यह होगा इस लिये यदि ज्या$^{-१}$(—१) का मान $(४\text{न}-१)\frac{\pi}{२}$ यह मानो तो अवश्य ज्या$^{-१}$(०) का मान $(४\text{न}-१)\frac{\pi}{२}+\frac{\pi}{२}$ यह और ज्या$^{-१}$(+१) का मान

$(४\text{न}-१)\frac{\pi}{२}+\frac{\pi}{२}+\frac{\pi}{२} = (४\text{न}-१)\frac{\pi}{२}+\pi$ यह होगा। इस लिये

ज्या$^{-१}(+१) -$ ज्या$^{-१}(-१) = (४\text{न}-१)\frac{\pi}{२}+\pi - (४\text{न}-१)\frac{\pi}{२} = \pi$ यह निश्चय मान हुआ। अथवा पहले ज्या$^{-१}\frac{\text{य}}{\text{अ}}$ इस का मान चलनकलन के (२०) वें प्रक्रम के (३) उदाहरण से श्रेढी के रूप में

$$\text{ज्या}^{-१}\frac{\text{य}}{\text{अ}} = \frac{\text{य}}{\text{अ}} + \frac{१}{१.२}\cdot\frac{\text{य}^३}{३\text{अ}^३} + \frac{१.३}{२.४}\,\frac{\text{य}^५}{५\text{अ}^५} + \frac{१.३.५}{२.४.६}\,\frac{\text{य}^७}{७\text{अ}^७} + \cdots$$ यह ले आवो

इस में य = अ, और य = —अ, यह मान कर

$$\text{ज्या}^{-१}(+१) = १ + \frac{१}{१.२}\cdot\frac{१}{३} + \frac{१.३}{२.४}\cdot\frac{१}{५} + \cdots$$

$$\text{ज्या}^{-१}(-१) = -१ - \frac{१}{१.२}\cdot\frac{१}{३} - \frac{१.३}{२.४}\,\frac{१}{५} - \cdots = -\text{ज्या}^{-१}(+१)$$ इस लिये

ज्या$^{-१}(+१) -$ ज्या$^{-१}(-१) = २$ज्या$^{-१}(+१) = २\frac{\pi}{२} = \pi$ यह सिद्ध हुआ। परन्तु इस बात का यहाँ अवश्य ध्यान रखना चाहिये कि ज्या पर से इस श्रेढी द्वारा जो चाप का मान आता है वह सर्वदा $\frac{\pi}{२}$ इस से अल्प इस लिये यहाँ भी पहले के ऐसा इस एक मान को लेकर विचार करना चाहिये।

४६। जब ४० वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि

$$\int_{अ}^{क} फ(य) ताय = च_१ फ(अ) + च_२ फ(य_१) + \cdots + च_न फ(य_{न-१}) \cdots (१)$$

$$\int_{अ}^{क} फा(य) ताय = च_१ फा(अ) + च_२ फा(य_१) + \cdots + च_न फा(य_{न-१}) \cdots (२)$$

और $$\int_{अ}^{क} फि(य) ताय = च_१ फि(अ) + च_२ फि(य_१) + \cdots + च_न फि(य_{न-१}) \cdots (३)$$

होंगे इस लिये फ (अ), फ($य_१$), फ($य_२$), $\cdots$ फ($य_{न-१}$) प्रत्येक क्रम से यदि फा (अ), फा ($य_१$), फा($य_२$), $\cdots$ फा($य_{न-१}$) और फि(अ), फि($य_१$), फि($य_२$), $\cdots$ फि($य_{न-१}$) इन के प्रत्येक पद के भीतर हों अर्थात् फा(अ) और फि(अ) के बीच में फ(अ), फा($य_१$) और फि($य_१$) के बीच में फ ($य_१$) इत्यादि हों तो स्पष्ट है कि दूसरे और तीसरे के प्रत्येक पदों के योग अर्थात् $\int_{अ}^{क} फा(य) ताय$ और $\int_{अ}^{क} फि(य) ताय$ के बीच में $\int_{अ}^{क} फ(य) ताय$ यह होगा।

इस पर से यह सिद्ध होता है कि फ(य) यह फा(य) और फि(य) के बीच में हो य के अ और क के बीच किसी मान में तो

$\int_{अ}^{क} फ(य) ताय$ यह भी $\int_{अ}^{क} फा(य) ताय$ और $\int_{अ}^{क} फि(य) ताय$ के बीच में होगा।

जैसे त्रिकोणमिति से सिद्ध है कि $ज्या^{२न+१} य$ यह सर्वदा $ज्या^{२न} य$ और $ज्या^{२न+२} य$ के बीच में रहता है अर्थात् $ज्या^{२न} य > ज्या^{२न+१} य > ज्या^{२न+२} य$ तो ऊपर के सिद्धान्त से $\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} ज्या^{२न} य ताय > \int_{0}^{\frac{\pi}{२}} ज्या^{२न+१} य ताय$

$> \int_{0}^{\frac{\pi}{२}} ज्या^{२न+२} य ताय$ यह होगा।

४७। यदि फ (य), य के स्थान में अ और अ से बड़ी संख्या का उत्थापन देने से उत्तरोत्तर न्यून होता जाय तो

फ(अ) + फ(अ + १) + फ(अ + २) + $\cdots$ अनन्त $\cdots$ यह श्रेढी और $\int_{अ}^{\infty} फ(य) ताय$

यह दोनों सान्त अथवा दोनों अनन्त होंगे।

क्योंकि (४०) वें प्रक्रम में क = अ + १ ऐसा मानो तो सिद्ध होगा कि

$$(\text{क}-\text{अ})\text{फ}(\text{अ}) = \text{फ}(\text{अ}) > \int_{\text{अ}}^{\text{अ}+१} \text{फ}(\text{य})\text{ताय} > (\text{क}-\text{अ})\text{फ}(\text{अ}+१) = \text{फ}(\text{अ}+१)$$

इसी तरह

$$\text{फ}(\text{अ}+१) > \int_{\text{अ}+१}^{\text{अ}+२} \text{फ}(\text{य})\,\text{ताय} > \text{फ}(\text{अ}+२)$$

$$\vdots$$

$$\text{फ}\{\text{अ}+(\text{न}-१)\} > \int_{\text{अ}+(\text{न}-१)}^{\text{अ}+\text{न}} \text{फ}(\text{य})\text{ताय} > \text{फ}(\text{अ}+\text{न})$$

तीनों का योग कर न को अनन्त मानने से (४१) वें प्रक्रम के (१) समीकरण से

$$\text{फ}(\text{अ}) + \text{फ}(\text{अ}+१) + \text{फ}(\text{अ}+२) + \cdots > \int_{\text{अ}}^{\infty} \text{फ}(\text{य})\text{ताय} < \text{फ}(\text{अ}+१)$$

$$+\text{फ}(\text{अ}+२) + \text{फ}(\text{अ}+३) + \cdots$$ यह सिद्ध हुआ ।

इसलिये यदि श्रेढ़ी सान्त होगी तो $\int_{०}^{\infty} \text{फ}(\text{य})\text{ताय}$ यह सान्त और श्रेढ़ी के अनन्त में अनन्त होगा ।

४८ । यदि लाय = ला, $\text{ला}\{\text{ला}(\text{य})\} = \text{ला}^{२}(\text{य}), \text{ला}[\text{ला}\{\text{ला}(\text{य})\}] = \text{ला}^{३}(\text{य})$ इत्यादि कल्पना करो तो चलनकलन से

$$\frac{\text{ता}}{\text{ताय}}\left[\frac{\{\text{ला}^{\text{द}+१}(\text{य})\}^{१-\text{त}}}{१-\text{त}}\right] = \frac{१}{\text{यला}(\text{य})\text{ला}^{२}(\text{य})\cdots\text{ला}^{\text{द}}(\text{य})\{\text{ला}^{\text{द}+१}(\text{य})\}^{\text{त}}}\,\text{ताय}$$

इस लिये यदि $\text{फ}(\text{य})\text{ताय} = \dfrac{}{\text{यला}(\text{य})\text{ला}^{२}(\text{य})\text{ला}^{३}(\text{य})\cdots\text{ला}^{\text{द}}(\text{य})\{\text{ला}^{+१}(\text{य})\}^{\text{त}}}$

तो $\int \text{फ}(\text{य})\text{ताय} = \dfrac{\{\text{ला}^{\text{द}+१}(\text{य})\}^{१-\text{त}}}{१-\text{त}}$ यदि त रूप के तुल्य न हो और यदि त रूप के तुल्य हो तो $\int \text{फ}(\text{य})\text{ताय} = \text{ला}^{\text{द}+२}(\text{य})$ होगा ।

और $\int_{\text{अ}}^{\infty} \text{फ}(\text{य})\text{ताय} = -\dfrac{\{\text{ला}^{\text{द}+१}(\text{अ})\}^{१-\text{त}}}{१-\text{त}}$ यदि त > १ और यदि त = १ वा त < १ तो $\int_{\text{अ}}^{\infty} \text{फ}(\text{य})\,\text{ताय} = \infty$ इस लिये (४७) वें प्रक्रम से

$$\text{फ}(\text{य}) = \frac{१}{\text{यला}(\text{य})\text{ला}^{२}(\text{य})\cdots\text{ला}^{\text{द}}(\text{य})\{\text{ला}^{\text{द}+१}(\text{य})\}^{\text{त}}}$$ इस में य के स्थान में अ, अ + १, अ + २, इत्यादि का उत्थापन देने से जो श्रेढ़ी होगी वह सान्त

होगी अर्थात् उसके उत्तरोत्तर पास के दो पदों का सम्बन्ध एक से अल्प होता जायगा। चाहे पद की संख्या कितनी ही हो।

४९। कल्पना करो कि जिस में अनन्त पद हैं वैसी एक

$\frac{१}{फा(न)} + \frac{१}{फा(न+१)} + \frac{१}{फा(न+२)} + \frac{१}{फा(न+३)} + \cdots\cdots$ यह श्रेढ़ी है जिसके किसी एक पद का मान $\frac{१}{फा(य)}$ ऐसा समझो। अब यहाँ इस बात का पता लगाना है कि इस श्रेढ़ी का मान सान्त होगा वा अनन्त। यदि श्रेढ़ी का मान अनन्त होगा तब तो स्पष्ट ही है कि ज्यों ज्यों य बढ़ता जायगा त्यों त्यों $\frac{१}{फा(य)}$ भी बढ़ता जायगा। इस लिये यदि श्रेढ़ी का मान सान्त होगा तो निश्चय है कि ज्यों ज्यों य बढ़ता जायगा त्यों त्यों फा(य) भी बढ़ता जायगा।

कल्पना करो कि न से आगे अनन्त तक चाहे जितना य बढ़ता जाय परन्तु $\frac{१}{फा(य)}$ इस का मान सर्वदा $\frac{ग}{य^{त}}$ इस से छोटा है जहां ग और त कोई स्थिर संख्या और त $>$ १ है। ऐसी स्थिति में ४७ वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि उद्दिष्ट श्रेढ़ी का मान $\frac{ग}{न^{त}} + \frac{ग}{(न+१)^{त}} + \frac{ग}{(न+२)^{त}} + \cdots\cdot$ इस श्रेढ़ी से अल्प होगा इस लिये स्वयं भी सान्त होगा।

यदि $\frac{१}{फा(य)} < \frac{ग}{य^{त}} \therefore य^{त} < ग\ फा(य)$

और त ला (य) $<$ ला $\{ गफा(य) \}$ लघुरिक्थ लेने से

इस लिये त $< \frac{ला\{ गफा(य) \}}{लाय}$ इस में यदि य $= \infty$ तो हर और अंश दोनों अनन्त होते हैं इस लिये चलनकलन के ५वें अध्याय से

$\frac{ला\{ गफा(य) \}}{लाय}$ इस का मान $\frac{यफा'(य)}{फा(य)}$ यह होगा। इस लिये इस में य के स्थान में अनन्त का उत्थापन देने से इस लुप्तभिन्न का मान यदि एक से अधिक हो तो त का ऐसा मान मान सकते हैं जो कि एक से अधिक अर्थात् सर्वदा $य^{त} < ग$ फा(य) हो। और इसी तरह यदि लुप्तभिन्न का मान एक से न्यून हो तो त का मान ऐसा छोटा मान सकते हैं जिस में सर्वदा $य^{त} > ग$ फा(य) हो ऐसी स्थिति में श्रेढी का मान अनन्त होगा।

इस पर से यह सिद्ध होता है कि किसी श्रेढी में यदि य के स्थान में अनन्त का उत्थापन देने से $\frac{\text{य}\acute{\text{फा}}(\text{य})}{(\text{फाय})}$ इस का मान एक से अधिक हो तो श्रेढ़ी का मान सान्त और अल्प हो तो श्रेढ़ी का मान अनन्त होगा।

परन्तु यदि $\frac{\text{य}\acute{\text{फा}}(\text{य})}{\text{फा}(\text{य})}$ इस का मान एक के बराबर हो तो (४८)वें प्रक्रम से $\int \text{फ}(\text{य})\ \text{ताय} = \frac{\text{गय}^{१-\text{त}}}{१-\text{त}}$ इस लिये $\int_{\text{न}}^{\infty} \text{फ}(\text{य})\ \text{ताय} = \infty$ ऐसी स्थिति में अब यह नहीं कह सकते कि उद्दिष्ट श्रेढ़ी का मान सान्त होगा वा अनन्त।

अब मानो कि न से लेकर अनन्त तक य के मान में $\frac{१}{\text{फा}(\text{य})}$ यह $\frac{\text{ग}}{\text{य}\{\text{लाय}\}^{\text{त}}}$ इससे छोटा रहता है जहां ग और त स्थिराङ्क और त $>$ १ तो ४८वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि श्रेढ़ी का मान सान्त होगा। परन्तु $\frac{१}{\text{फा}(\text{य})} \angle \frac{\text{ग}}{\text{य}(\text{लाय})^{\text{त}}} \therefore \{\text{ला}(\text{य})\}^{\text{त}} \angle \frac{\text{गफा}(\text{य})}{\text{य}}$ लघुरिक्थ लेने से

$$\text{त ला}^2(\text{य}) \angle \text{ला}\frac{\text{गफा}(\text{य})}{\text{य}} \therefore \text{त} \angle \frac{\text{ला}\frac{\text{गफा}(\text{य})}{\text{य}}}{\text{ला}^2(\text{य})} = \frac{\text{लागफा}(\text{य}) - \text{ला}(\text{य})}{\text{ला}^2(\text{य})}$$

यहां भी य के अनन्त मान में यह लुप्तभिन्न हुआ जिस का मान चलनकलन के ३९वें प्रक्रम से $\text{ला}(\text{य})\left\{\frac{\text{य}\acute{\text{फा}}(\text{य})}{(\text{फाय})} - १\right\}$ यह होगा

इस लिये इस का मान यदि एक से अधिक हो तो श्रेढ़ी का मान सान्त और एक से न्यून में अनन्त होगा।

इस लुप्तभिन्न का मान यदि एक के बराबर हो तो फिर पहले के ऐसा अनिश्चय होगा। तब $\frac{१}{\text{फा}(\text{य})}$ इस का मान $\frac{\text{ग}}{\text{यला}(\text{य})\{\text{ला}^2(\text{य})\}^{\text{त}}}$ इस से छोटा कल्पना कर पहले ऐसी क्रिया करो तो लुप्तभिन्न का मान

$\text{ला}^2(\text{य})\left[\text{ला}(\text{य})\left\{\frac{\text{य}\acute{\text{फा}}(\text{य})}{\text{फा}(\text{य})} - १\right\}\right]$ ऐसा होगा

इस में यदि $\frac{\text{य}\acute{\text{फा}}(\text{य})}{\text{फा}(\text{य})}$ ता_0, $\text{ला}(\text{य})\left\{\frac{\text{य}\acute{\text{फा}}(\text{य})}{\text{फा}(\text{य})} - १\right\} = \text{ता}_1$,

$ला^{२}(य) \left[ला(य) \left\{ \frac{यफा'(य)}{फा(य)} - १ \right\} \right] = ता_{२}$ इत्यादि मानो तो

साधारण यह क्रिया उत्पन्न होती है

$ता_{१} = ला(य)(ता_{०}-१),\ ता_{२} = ला^{२}(य)(ता_{१}-१),\ ता_{३} = ला^{३}(य)(ता_{२}-१) \cdots\cdots$

$ता_{म} = ला^{म}(य) \{ ता_{म-१} - १ \}$ । इस लिये इस सिद्धान्त पर से $ता_{०}$, $ता_{१}$, $ता_{२}$, इत्यादि के मान बनाते चले जावो जिस का मान एक से भिन्न हो उस पर से उद्दिष्ट श्रेढ़ी का मान सान्त वा अनन्त है इस का विचार कर सकते हो।

यदि $\frac{१}{फा(य)} = फि(य)$ तो $फा(य) = \frac{१}{फि(य)}$ इस का उत्थापन $ता_{०}$ में देने से

$ता_{०} = \frac{यफा'(य)}{फा(य)} = -\frac{यफि'(य)}{फि(य)}$ ऐसा होगा फिर आगे $ता_{१}$, $ता_{२}$ इत्यादि का मान पूर्ववत् जान सकते हो।

चलनकलन से $-\frac{यफि'(य)}{फि(य)} = य \left\{ \frac{फि(य)}{फि(य+१)} - १ \right\}$ यह भी सिद्ध कर सकते हो जब $य = \infty$ क्योंकि ऐसी दशा में $\frac{फि'(य+प)}{फि(य+१)} = \frac{फि'(य)}{फि(य)}$ जहां $प \angle १$।

इस प्रकार से श्रेढी का मान सान्त वा अनन्त होगा यह सब डिमार्गन (Demorgan) साहब ने अपने चलनकलन और चलराशिकलन (Differential and Integral Calculus) के २०८—२१० प्र० में लिखा है। इस में यह कुछ नियम नहीं कि लुप्तभिन्न ही के प्रकार से मान ले आवो चाहिये कि जिस प्रकार से लाघव हो वह क्रिया करो।

जैसे जिस श्रेढ़ी का न संख्यक पद $\left(\frac{१}{न}\right)^{अ+\frac{क}{न}}$ यह है उस का मान कैसा होगा यह जानना है यहां

$$\left(\frac{१}{य}\right)^{अ+\frac{क}{य}} = \frac{१}{\frac{१}{\left(\frac{१}{य}\right)^{अ+\frac{क}{य}}}} = \frac{१}{फा(य)},\ यदि\ फि(य) = \left(\frac{१}{य}\right)^{अ+\frac{क}{य}}$$

इस लिये लघुरिकथ लेने से

$$ला\{फि(य)\} = \left(अ+\frac{क}{य}\right) ला\left(\frac{१}{य}\right) = -\left(अ+\frac{क}{य}\right) ला(य)$$

तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\frac{\text{फि}'(\text{य})}{\text{फि}(\text{य})} = -\left[\frac{\text{अ}}{\text{य}} + \frac{\text{क}}{\text{य}^2}\right] + \frac{\text{कलाय}}{\text{य}^2}$$

इस लिये

$\text{ता}_0 = -\dfrac{\text{य}\text{फि}'(\text{य})}{\text{फि}(\text{य})} = \left(\text{अ} + \frac{\text{क}}{\text{य}}\right) - \dfrac{\text{कलाय}}{\text{य}}$ इस में यदि य $= \infty$ तो

$\dfrac{\text{क}}{\text{य}} = 0$, और $\dfrac{\text{कलाय}}{\text{य}} = \text{क}\dfrac{1}{\text{य}} = 0$ लुप्तभिन्न के आनयन से।

इस लिये $\text{ता}_0 = \text{अ}$। इस लिये यदि $\text{अ} > 1$ तो श्रेढ़ी का मान सान्त और यदि $\text{अ} < 1$ तो श्रेढ़ी का मान अनन्त होगा।

५०। कल्पना करो कि

$$\text{फा}(\text{ल}) = \text{फ}(\text{य}-\text{ल}) + \text{ल}\text{फ}'(\text{य}-\text{ल}) + \frac{\text{ल}^2}{\lfloor 2}\text{फ}''(\text{य}-\text{ल}) + \cdots + \frac{\text{ल}^{\text{न}}}{\lfloor \text{न}}\text{फ}^{\text{न}}(\text{य}-\text{ल}), \cdots (1)$$

ल के वश से तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\text{फा}'(\text{ल}) = \text{फ}'(\text{य}-\text{ल}) + \text{फ}'(\text{य}-\text{ल}) - \text{ल}\text{फ}''(\text{य}-\text{ल}) + \text{ल}\text{फ}''(\text{य}-\text{ल}) - \frac{\text{ल}^2}{\lfloor 2}\text{फ}'''(\text{य}-\text{ल})$$

$$\cdots\cdots + \frac{\text{ल}^{\text{न}-1}}{\lfloor \text{न}-1}\text{फ}^{\text{न}}(\text{य}-\text{ल}) - \frac{\text{ल}^{\text{न}}}{\lfloor \text{न}}\text{फ}^{\text{न}+1}(\text{य}-\text{ल})$$

$$= -\frac{\text{ल}^{\text{न}}}{\lfloor \text{न}}\text{फ}^{\text{न}+1}(\text{य}-\text{ल})$$

ल के ० और च के बीच मान में दोनों के सान्त चल मान

$$\text{फा}(\text{च}) - \text{फा}(0) = -\frac{1}{\lfloor \text{न}}\int_0^{\text{च}} \text{ल}^{\text{न}}\text{फ}^{\text{न}+1}(\text{य}-\text{ल})\text{ताल}$$

परन्तु (१) में ल के स्थान में ० और च का उत्थापन देने से

$$\text{फा}(\text{च}) - \text{फा}(0) = \text{फ}(\text{य}-\text{च}) + \text{च}\text{फ}'(\text{य}-\text{च}) + \frac{\text{च}^2}{\lfloor 2}\text{फ}''(\text{य}-\text{च}) + \cdots$$

$$+ \frac{\text{च}^{\text{न}}}{\lfloor \text{न}}\text{फ}^{\text{न}}(\text{य}-\text{च}) - \text{फ}(\text{य})$$

$$= -\frac{1}{\lfloor \text{न}}\int_0^{\text{च}} \text{ल}^{\text{न}}\text{फ}^{\text{न}+1}(\text{य}-\text{ल})\text{ताल}$$

य के स्थान में अ + च का उत्थापन देकर पक्षान्तरानयन से

$$\text{फ}(\text{अ}+\text{च}) = \text{फ}(\text{अ}) + \text{च}\text{फ}'(\text{अ}) + \frac{\text{च}^2}{\lfloor 2}\text{फ}''(\text{अ}) + \cdots + \frac{\text{च}^{\text{न}}}{\lfloor \text{न}}\text{फ}^{\text{न}}(\text{अ})$$

$+\frac{१}{|\underline{न}}\int_{0}^{च} ल^{न} फ^{न+१}(य - ल) ताल$

इस लिये फ(अ + च) इस का चलनकलन में टेलर के सिद्धान्त सें जो श्रेढ़ी में मान आवेगा उस में न पद के अनन्तर न + १, न + २, इत्यादि जो पद होंगे उनका योग $\frac{१}{|\underline{न}}\int_{0}^{च} ल^{न} फ^{न+१}(य - ल) ताल$ इस सान्तचल के तुल्य होगा जिस का मान (४०) वें प्रक्रम से $\frac{१}{|\underline{न}} प^{न} च^{न+१} फ^{न+१}(अ + च - पच)$ ऐसा वा,

$\frac{१}{|\underline{न}} फ^{न+१}(अ + च - पच)\int_{0}^{च} ल^{न} ताल = \frac{१}{|\underline{न}} फ^{न+१} \{ अ + च(१ - प) \} \int_{0}^{च} ल^{न} ताल$

$= \frac{१}{|\underline{न}} फ^{न+१}(अ + चप_{१}) \int_{0}^{च} ल^{न} ताल$ ऐसा होगा [जहां $प_{१} = १ - प =$ कोई एक से न्यून संख्या है] $= \frac{च^{न+१}}{|\underline{न+१}} फ^{न+१}(अ + चप_{१})$ ऐसा होगा

५१। जब चलनकलन से सिद्ध है कि फल का वा फल में स्थिराङ्क युत वा रहित का तात्कालिक सम्बन्ध एक ही होता है इस लिये एक ही तात्कालिक सम्बन्ध का यदि कई एक प्रकार से चलानयन करो तो स्पष्ट है कि वे सब तुल्य होंगे वा उनका अन्तर कोई स्थिराङ्क के तुल्य होगा।

जैसे $\int \frac{ताय}{(१ - य)^{२}} = \int ताय\ (१ - य)^{-२} = -\int - ताय\ (१ - य)^{-२} = \frac{१}{१ - य}$

यह प्रथमाध्याय के (३) सूत्र से सिद्ध हुआ। और इसी में यदि $य = \frac{१}{र}$ ऐसा मानो तो $ताय = -\frac{तार}{र^{२}}$ और $(१ - य)^{२} = (\frac{र - १}{र})^{२}$ इस लिये

$\int \frac{ताय}{(१ - य)^{२}} = -\int \frac{तार}{(र - १)^{२}} = \frac{१}{र - १} = \frac{य}{१ - य}$ प्रथमाध्याय के तीसरे सूत्र से। इस लिये दोनों का अन्तर $= \frac{य}{१ - य} \backsim \frac{१}{१ - य} = १ =$ स्थिराङ्क के हुआ। ऐसे ही सब जगह जानना चाहिये।

इसी जगह यदि $\int_{0}^{२} \frac{ताय}{(१ - य)^{२}}$ इस का मान जानना हो तो स्पष्ट है कि दोनों पर से एक ही आवेगा क्योंकि $\int फ(य) ताय = फा(य)$ वा, $\int फ(य) ताय = फा(य) +$ स्थि ऐसा मानो तो पहले से $\int_{अ}^{क} फ(य) ताय = फा(क) - फा(अ)$

और दूसरे मान से भी फा(क) + स्थि — { फा(अ) + स्थि } = फा(क)—फा(अ) वही हुआ।

एक ही तात्कालिक सम्बन्ध का भिन्न भिन्न रूप में चलानयन कर और उन पर से दो सीमाओं के भीतर दो सान्त चलानयन कर अनेक चमत्कृत समता उत्पन्न कर सकते हो। जैसे खण्डचलानयन से सिद्ध है कि

$$\int य^म (१—य)^न ताय = \frac{य^{म+१}(१—य)^न}{म+१} + \frac{न}{म+१}\int य^{म+१}(१-य)^{न-१} ताय$$

इस लिये $\int_0^1 य^म(१—य)^न ताय = \frac{न}{म+१}\int_0^1 य^{म+१}(१—य)^{न-१} ताय$

वार वार यही क्रिया करने से

$$\int_0^1 य^म(१—य)^न ताय = \frac{न(न—१)(न—२)\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot १}{(म+१)(म+२)\cdot\cdot(म+न+१)} \cdot\cdot\cdot (१)$$

और द्वियुक्पदसिद्धान्त से

$$य^म(१—य)^न = य^म\left\{१—नय + \frac{न(न-१)}{\underline{|२}}य^२ — \frac{न(न-१)(न-२)}{\underline{|३}}य^३ + \cdot\cdot\cdot\right\}$$

$$= य^म—नय^{म+१} + \frac{न(न-१)}{\underline{|२}}य^{म+२} — \frac{न(न-१)(न-२)}{\underline{|३}}य^{म+३} + \cdot\cdot\cdot\cdot$$

इस लिये प्रथमाध्याय के (३) सूत्र से

$$\int य^म(१—य)^न ताय = \frac{य^{म+१}}{म+१} - \frac{न}{म+२}य^{म+२} + \frac{न(न-१)}{\underline{|२}(म+३)}य^{म+३}$$

$$- \frac{न(न—१)(न—२)}{\underline{|३}(म+४)}य^{म+४} + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

और $\int_0^1 य^म(१—य)^न ताय = \frac{१}{म+१} — \frac{न}{१}\cdot\frac{१}{म+२} + \frac{न(न—१)}{\underline{|\ \ }}\frac{१}{म+३}$

$$- \frac{न(न-१)(न-२)}{\underline{|३}}\frac{१}{म+४} + \cdot\cdot\cdot\cdot + (—१)\frac{न_१}{म+न+१} \cdot\cdot\cdot\cdot (२)$$

इस लिये यहाँ ऊपर की युक्ति से निश्चय है कि (१) और (२) का दहिना पक्ष परस्पर तुल्य हैं।

५२। खण्ड चलानयन से सिद्ध है कि

$\int फ(य) ताय = यफ(य) — \int यफ'(य) ताय$

$\int यफ'(य) ताय = \frac{य^२}{२}फ'(य) — \frac{१}{२}\int य^२फ''(य) ताय$

$$\int य^2 फ^{''}(य) ताय = \frac{य^3}{3} फ^{''}(य) - \frac{1}{3}\int य^3 फ^{'''}(य) ताय$$

. . . .

इन सव का एक एक में उत्थापन देने से

$$\int फ(य) ताय = यफ(य) - \frac{य^2}{\lfloor 2} फ^{'}(य) + \frac{य^3}{\lfloor 3} फ^{''}(य) - \frac{य^4}{\lfloor 4} फ^{'''}(य) + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{(-1)^{न-1}}{\lfloor न} य^न फ^{न-1}(य) + \frac{(-1)^न}{\lfloor न} \int य^न फ^न(य) ताय$$

इस लिये

$$\int_0^अ फ(य) ताय = अफ(अ) - \frac{अ^2}{\lfloor 2} फ^{'}(अ) + \frac{अ^3}{\lfloor 3} फ^{''}(अ) - \frac{अ^4}{\lfloor 4} फ(अ) + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{(-1)^{न-1} अ^न}{\lfloor न} फ^{न-1}(अ) + \frac{(-1)^न}{\lfloor न} \int_0^अ य^न फ^न(य) ताय$$

इस प्रकार से सान्तचल ज्ञान के लिये यह जो श्रेढ़ी उत्पन्न हुई है उसे बर्नेली (Bernoulli) साहब ने निकाला है इस लिये उन के आदरार्थ इस को बर्नेली की श्रेढ़ी (Bernoulli's Series) कहते हैं।

यह जहाँ फ(य) का रूप $य^{न-1}$ इस तरह का हो वहां पर बड़े काम की है क्योंकि ऐसी जगह पर

$फ^न(य) = \frac{ता^न(य^{न-1})}{ताय^न}$ यह शून्य के तुल्य होगा। अथवा जहां पर $\int$ फ(य) ताय इसकी अपेक्षा $\int य^न फ^न(य)$ताय इस का मान सहज में निकलता हो वहां पर भी यह बड़े काम की है।

जहांपर $\int_0^अ य^न फ^न(य)$ ताय इसका मान बहुत थोड़ा हो वहां पर भी स्वल्पान्तर से $\int_0^अ$ फ(य)ताय इसके आसन्न मान का ज्ञान इस से सहज में हो सकता है।

५३। जब कि सिद्ध है कि $\int$फ(य)ताय यह य के उस फल को बताता है जिसका तात्कालिक सम्बन्ध फ(य) है तब स्पष्ट है कि एक फल ऐसा भी होगा जिसका तत्कालिक सम्बन्ध $\int$फ(य)ताय यह हो अर्थात् यदि $\int$फ(य)ताय = फा(य) मानो तो $\int$ फा(य)ताय यह भी एक मान जान सकते हो जिसका तात्कालिक सम्बन्ध फा(य) के समान होगा। ऐसे ही वार वार चलज्ञान कर सकते हो।

इसको $\int$ फ(य)ताय = फा(य)। $\int$ फा(य)ताय = $\int\int$ फ(य)ताय ताय = फ(य)। $\int$ फि(य)ताय = $\int\int$ फा(य)ताय ताय = $\int\int\int$ फ(य) ताय ताय ताय इस तरह से लिखते हैं। $\int\int\int$ फ(य)ताय ताय ताय यह प्रकाश करता है कि $\int$ फ(य)ताय इसके मान को ताय से गुणने से जो हो उसके चल मान को फिर ताय से गुणकर गुणित फल का चल है।

जैसे $\int$ ताय = य + $ग_१$

$$\int (य + ग_१)ताय = \int\int ताय\ ताय = \frac{य^२}{२} + ग_१य + ग_२$$

$$\int\left(\frac{य^२}{२} + ग_१य + ग_२\right) = \int\int (य + ग_१)ताय\ ताय = \int\int\int ताय\ ताय\ ताय$$

$= \frac{य^३}{६} + \frac{ग_१}{२}य^२ + ग_२य + ग_३$ जहां $ग_१, ग_२$ इत्यादि स्थिराङ्क हैं।

इसी तरह यहां न वार चलज्ञान करें तो स्पष्ट है कि उस का मान $आ_०य^न + आ_१य^{न-१} + आ_२य^{न-२} + \cdots + आ_न$ ऐसा होगा जहां $आ_०$, $आ_न$, इत्यादि स्थिराङ्क हैं।

५४। यदि $\int$ च ताय = $च_१$, $\int च_१$ताय = $च_२$, $\int च_२$ताय = $च_३$ इत्यादि मानो जहां च, $च_१$, इत्यादि य के फल हैं और $\frac{ताज}{ताय} = ज_१, \frac{ता^२ज}{ताय^२} = ज_२$, इत्यादि जहां ज य का कोई फल है तो खण्डचलानयन से

$\int$ चज ताय = $च_१ज - \int च_१ज_१$ ताय = $च_१ज_१ - च_२ज_१ + \int च_२ज_२$ ताय

$= च_१ज - च_२ज_१ + च_३ज_२ - च_४ज_३ + \cdots + (-१)^{न-१}च_नज_{न-१}$

$+ (-१)^न \int च_नज_न$ताय इसी श्रेढ़ी में यदि च = १ और ज = फ(य) मानो तो बर्नली की श्रेढ़ी उत्पन्न हो जायगी इस लिये इस श्रेढ़ी को बर्नली के श्रेढ़ी का मूल कह सकते हैं। यह श्रेढ़ी भी बहुत स्थानों में बड़े काम की है।

जैसे इस श्रेढ़ी में यदि च = $इ^य$ मानो तो स्पष्ट है कि $च_१$, $च_२$ इत्यादि सब परस्पर तुल्य होंगे इस लिये

$\int इ^य$ज ताय = $इ^य \{ ज - ज_१ + ज_२ - ज_३ + \cdots (-१)^{न-१}ज_{न-१} \}$

$+ (-१)^न \int इ^यज_न$ ताय

इस में ज के स्थान में भिन्न भिन्न फल का उत्थापन देने से हजारों उदाहरण बना सकते हो।

५५। यदि $च_1 = \int च\ ताय$, $च_2 = \int च_1\ ताय$, $च_3 = \int च_2\ ताय$ इत्यादि मानो तो खण्डचलानयन से

$$च_2 = \int च_1 ताय = यच_1 - \int य \frac{ताच_1}{ताय} ताय = य\int च\ ताय - \int य\ च\ ताय$$

$$च_3 = \int च_2 ताय = \int \{ य \int च\ ताय - \int यच\ ताय \}\ ताय$$

यहां भी खण्डचलानयन से

$$च_3 = \frac{य^2}{2}\int च\ ताय - \int \frac{य^2}{2} च\ ताय - य\int यच\ ताय + \int य^2 च\ ताय$$

$$= \frac{य^2}{2}\int च\ ताय - य\int यच\ ताय + \frac{1}{2}\int य^2 च\ ताय$$

इसी प्रकार से वार वार करते जाओ तो अन्त में

$$च_{न+1} \underline{|न} = य^न \int चताय - नय^{न-1}\int यचताय + \int \frac{न(न-1)}{\underline{|2}} य^{न-2}\int य^2 चताय \cdots$$

$$\cdots + (-1)^द \frac{न(न-1)(न-2)\cdots(न-द+1)}{\underline{|द}} य^{न-द}\int य^द च\ ताय$$

$$+ (-1)^न \int य^न च\ ताय$$

यह एक सिद्धान्त उत्पन्न हो जायगा।

इस की सत्यता के लिये मानो कि किसी न के मान में यह सिद्धान्त सत्य है तो $च_{न+2} = \int च_{न+1} ताय$ और $\underline{|न}\ च_{न+2} = \int \underline{|न}\ च_{न+1}\ ताय$

$$= \int \{ य^न ताय \int च\ ताय \} - \int \{ नय^{न-1} ताय \int यच\ ताय \}$$

$$+ \int \left\{ \frac{न(न-1)}{\underline{|2}} य^{न-2}\ ताय \int य^2 च\ ताय \right\} \cdots$$ प्रत्येक $\{\ \}$ अन्तर्गत का खण्डचलानयन से मान ले आने से

$$\underline{|न}\ च_{न+2} = \frac{य^{न+1}}{न+1}\int चताय - \frac{1}{न+1}\int य^{न+1} चताय - य^न\int यचताय + \int य^{न+1} चताय$$

$$+ \frac{न}{\underline{|2}} य^{न-1}\int य^2 चताय - \frac{न}{\underline{|2}}\int य^{न+1} चताय + \cdots$$

न + १ से दोनों पक्षों को गुणकर दहिने पक्ष को यथा क्रम लिखने से

$$च_{न+2} \underline{|न+1} = य^{न+1}\int चताय - (न+1)य^न \int यचताय$$

$$+ \frac{न(न+1)}{\underline{|2}} य^{न-1} \int य^2 चताय - \cdots$$

वा, $च_{म+1} \underline{|म} = य^म \int चताय - मय^{म-1}\int यचताय$

$$+\frac{म(म-१)}{\lfloor २}य^{म-२}\int य^{२}चताय - \cdots$$

इस लिये यदि यह सिद्धान्त किसी न मान में सत्य हो तो न+१ में भी सत्य होगा परन्तु यदि न=२ तो $च_{३}$ के मान से स्पष्ट है कि यह सिद्धान्त सत्य है इसलिये न के सब मान में यह सिद्धान्त सत्य ठहरा ।

५६ । $\int ज्या^{न}यताय$ वा $\int कोज्या^{न}यताय$ के मान के लिये यदि चलन-कलन के ३०० प्रक्रम की युक्ति से $ज्या^{न}य$ वा $कोज्या^{न}य$ का रूप ज्या और कोटिज्या की श्रेढ़ी में ले आवो तो वहुत ही सुगमता चलानयन में होगी। जैसे चलनकलन के ३०० प्रक्रम की युक्ति से सिद्ध है कि

$८\ ज्या^{४}य = कोज्या४य - ४कोज्या२य + ३$

इस लिये

$$८\int ज्या^{४}यताय = \int कोज्या४यताय - ४\int कोज्या२यताय + \int ३\ ताय$$

$$= \frac{ज्या४य}{४} - २\ ज्या२य + ३य$$

$\therefore \int ज्या^{४}यताय = \frac{ज्या४य}{३२} - \frac{ज्या२य}{४} + \frac{३य}{८}$ यह पहले लघूकरणसिद्धान्त की अपेक्षा बड़े लाघव से सिद्ध हुआ।

इस प्रकार और भी वहुत उपाय से जिस में सुगमता हो वैसी क्रिया करनी चाहिये।

५७ । इस प्रक्रम में विद्यार्थियों को जिस में बोध हो इस लिये कुछ उदाहरण क्रिया समेत दिखाते हैं ।

(१) $\left(\frac{१}{२न}\right)^{त} + \left(\frac{२}{२न}\right)^{त} + \left(\frac{३}{२न}\right)^{त} + \cdots$ २ न पद तक जो यह श्रेढ़ी है

इस में $\left(\frac{१}{२} + \frac{१}{२न}\right)^{त} + \left(\frac{१}{२} + \frac{२}{२न}\right)^{त} + \cdots$ न पद तक जो यह श्रेढ़ी है इसका भाग देने से क्या लब्धि होगी यदि न = ∞ ।

यहां प्रश्नानुसार न के अनन्त मान में

$$\frac{\left(\frac{१}{२न}\right)^{त} + \left(\frac{२}{२न}\right)^{त} + \left(\frac{३}{२न}\right)^{त} + \cdots २\ न\ पद\ तक}{\left(\frac{१}{२} + \frac{१}{२न}\right)^{त} + \left(\frac{१}{२} + \frac{२}{२न}\right)^{त} + \left(\frac{१}{२} + \frac{३}{२न}\right)^{त} + \ldots न\ पद\ तक}$$ इसका मान जानना है

अंश और हर को $\frac{१}{२न}$ से गुण देने से

$$\text{अंश} = \frac{१}{२न}\left\{\left(\frac{१}{२न}\right)^{त} + \left(\frac{२}{२न}\right)^{त} + \left(\frac{३}{२न}\right) + \cdots \text{२ न पद तक}\right\}$$

$$\text{हर} = \frac{१}{२न}\left\{\left(\frac{१}{२} + \frac{१}{२न}\right)^{त} + \left(\frac{१}{२} + \frac{२}{२न}\right)^{त} + \left(\frac{१}{२} + \frac{३}{२न}\right)^{त} + \quad \text{न पद तक}\right\}$$

४०वें प्रक्रम के समीकरण के साथ अंश और हर दोनों की तुलना करो तो अंश में $\frac{१}{२न} = च$, $अ = ०$, $क = ० + २नच = १$ और $फ(य) = (य)^{त}$

इस लिये अंश का मान $= \int_{०}^{१} फ(य)ताय = \int_{०}^{१} य^{त}ताय = \frac{१}{त+१}$

और हर में पहला पद $फ(अ) = (\frac{१}{२} + \frac{१}{२न})^{त}$. $\therefore अ = \frac{१}{२} + \frac{१}{२न}$

और $\frac{१}{२न} = च$. $\therefore क - अ = चन = \frac{१}{२}$ और $क = \frac{१}{२} + अ = १ + \frac{१}{२न}$

और $फ(य) = (य)^{त}$ इस लिये $\int फ(य)ताय = \int (य)^{त}ताय = \frac{(य)^{त+१}}{त+१}$

$$\text{इस लिये हर} = \int_{\frac{१}{२}+\frac{१}{२न}}^{१+\frac{१}{२न}} फ(य)ताय = \frac{(१+\frac{१}{२न})^{त+१}}{त+१} - \frac{(\frac{१}{२}+\frac{१}{२न})^{त+१}}{त+१}$$

$$= \frac{१ - (\frac{१}{२})^{त+१}}{त+१} \quad \text{यदि } न = \infty$$

$$\text{इस लिये ऊपर के भिन्न का मान} = \frac{अं}{ह} = \frac{\frac{१}{त+१}}{\frac{१-(\frac{१}{२})^{त+१}}{त+१}} = \frac{१}{१-(\frac{१}{२})^{त+१}}$$

यही उत्तर हुआ ।

(२) सिद्ध करो कि यदि $फ(य) = फ(अ+य)$ तो

$$\int_{०}^{मअ} फ(य)ताय = म.\int_{०}^{अ} फ(य)ताय$$

यहाँ $\int_{०}^{मअ} फ(य)ताय$ इसका मान यदि २ प्रक्रम से श्रेढ़ी में लावो तो

$$\frac{मअ}{न}\left\{फ(०) + फ(\frac{मअ}{न}) + फ(\frac{२मअ}{न}) + \cdots फ\left[\frac{मअ(न-१)}{न}\right]\right\} \text{ ऐसा होगा} \ldots \quad \ldots \quad (१)$$

परन्तु प्रश्न से $फ(य) = फ(अ+य)$. $\therefore फ(०) = फ(अ)$, $फ(\frac{मअ}{न}) = फ(अ + (\frac{मअ}{न})$, इत्यादि । इनका उत्थापन देने से (१) का मान

$$\frac{मअ}{न}\left\{(अ) + फ(अ + \frac{मअ}{न}) + फ(अ + २\frac{मअ}{न}) + \ldots फ\left[अ + \frac{मअ(न-१)}{न}\right]\right\}$$

$= \int_{अ}^{मअ+अ} फ(य)ताय$ यह हुआ ।

इसी रीति से फ(य) पर से

$$\int_{अ}^{मंअ+अ} फ(य)ताय = \frac{मंअ}{न}\left\{ फ(अ) + फ\left(अ + \frac{मंअ}{न}\right) + फ\left(अ + \frac{२मंअ}{न}\right) + \cdots + फ\left[अ + \frac{मंअ\,(न-१)}{न}\right] \right\} \cdots (२)$$

यहाँ भी जब फ(य) = फ(य + अ). $\because$ फ(अ) = फ(२अ),

$फ\left(अ + \frac{मंअ}{न}\right) = फ\left(२अ + \frac{मंअ}{न}\right)$, इ० इन का उत्थापन (२) में देने से (२) का मान

$$\frac{मंअ}{न}\left\{ फ(२अ) + फ\left(२अ + \frac{मंअ}{न}\right) + \cdots + फ\left[२अ + \frac{मंअ(न-१)}{न}\right] \right\}$$
$$= \int_{२अ}^{मंअ+२अ} फ(य)\ ताय$$ यह हुआ

इस पर से सिद्ध हुआ कि

$$\int_{०}^{मंअ} फ(य)\ ताय = \int_{अ}^{मंअ+अ} फ(य)ताय = \int_{२अ}^{मअ+२अ} फ(य)ताय$$ इत्यादि।

मं के एक स्थान में १, का उत्थापन देने से

$$\int_{०}^{अ} फ(य)ताय = \int_{अ}^{२अ} फ(य)ताय = \int_{२अ}^{३अ} फ(य) = \cdots = \int_{अ(म-१)}^{मअ} फ(य)ताय (३)$$

अब ४१ वें प्रक्रम के (१) समीकरण से

$$\int_{०}^{मअ} फ(य)ताय = \int_{०}^{अ} फ(य)ताय + \int_{अ}^{२अ} फ(य)ताय + \int_{२अ}^{३अ} फ(य)ताय + \cdots \int_{(म-१)अ}^{मअ} फ(य)ताय = म\int_{०}^{अ} फ(य)ताय$$

(३) से सिद्ध हुआ।

अथवा जब फ(य) = फ(अ + य) इस लिये फ(०) = फ(अ) और फ(अ) = फ(२अ)

इस लिये य के ० और अ के बीच मानों में जो $\int_{०}^{अ} फ(य)\ ताय$ इस का मान होगा वही य के औ २ अर अ के बीच मानों में भी $\int_{अ}^{२अ} फ(य)ताय$ इस का मान होगा यों आगे भी सिद्ध कर सकते हो कि

$\int_{अ}^{२अ} फ(य)ताय = \int_{२अ}^{३अ} फ(य)ताय$, इत्यादि। इस पर से ४१वें प्रक्रम के

(२) समीकरण से पहले के ऐसा उत्तर निकाल सकते हो।

(३) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$ ला ज्याय ताय इस का मान क्या होगा ?

यहाँ ४१ वें प्रक्रम के (४) समीकरण से

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{लाज्यायताय} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ला}(\tfrac{\pi}{2}-\text{य})\,\text{ताय} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ला कोज्याय ताय}$$

$$\therefore 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{लाज्यायताय} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\text{लाज्याय} + \text{लाकोज्याय})\,\text{ताय} = \text{२र}$$

यदि $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$ ला ज्याय ताय = र,

$$\text{वा २र} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ला (ज्यायकोज्याय)ताय} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\text{लाज्या२य}-\text{ला२}\}\,\text{ताय}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ला ज्या२यताय} - \tfrac{1}{2}\pi\,\text{ला२}$$

२य के स्थान में य' का उत्थापन देने से सिद्ध कर सकते हो

$$\text{कि} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{लाज्या२यताय} = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \text{ला ज्याय'ताय'} = \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ला ज्याय ताय}$$

४१वें प्रक्रम के (६) समीकरण से

इस लिये $\text{२र} = \text{र} - \tfrac{1}{2}\pi\,\text{ला२} \;\therefore\; \text{र} = -\tfrac{1}{2}\pi\,\text{ला २} = \tfrac{1}{2}\pi\,\text{ला}\tfrac{1}{2}$

(४) $\int_0^{\pi} \dfrac{\text{यज्यायताय}}{1+\text{कोज्या}^2\text{य}}$ इस का क्या मान होगा।

इस का मान र_1 मान कर ४१वें प्रक्रम के (५)वें समीकरण से

$$\text{र}_1 = \int_0^{\pi} \frac{\text{यज्याय ताय}}{1+\text{कोज्या}^2\text{य}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{\text{यज्यायताय}}{1+\text{कोज्या}^2\text{य}} + \frac{(\pi-\text{य})\text{ज्यायताय}}{1+\text{कोज्या}^2\text{य}} \right\}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\text{यज्यायताय}}{1+\text{कोज्या}^2\text{य}} - \frac{\text{यज्यायताय}}{1+\text{कोज्या}^2\text{य}} + \frac{\pi\text{तायज्याय}}{1+\text{कोज्या}^2\text{य}} \right]$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi\text{ज्याय ताय}}{1+\text{कोज्या}^2\text{य}} = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{ज्याय ताय}}{1+\text{कोज्या}^2\text{य}}$$

$$= -\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{तार}}{1+\text{र}^2} \;(\text{यदि र} = \text{कोज्याय})$$

परन्तु $\int \frac{तार}{१+र^२} = स्प^{-१}र = स्प^{-१}$ (कोज्याय)

इस लिये जब य = ० तो कोज्याय = १ और $स्प^{-१}$ (कोज्याय) $= \frac{\pi}{४}$

और जब य $= \frac{\pi}{२}$ तो कोज्याय = ० और $स्प^{-१}$ (कोज्याय) = ०

इस लिये $-\pi \int_{०}^{\frac{\pi}{२}} \frac{तार}{१+र^२} = -\pi(०-\frac{\pi}{४}) = \frac{\pi^२}{४}$ यह उत्तर हुआ।

(५) $\int_{०}^{१} \frac{ला(१+य)}{१+य^२}$ ताय इस का क्या मान होगा।

यहां यदि स्पर = य तो ताय = $छे^२र$ तार = $(१+स्प^२र)$ तार

इस लिये $\frac{ला(१+य)}{१+य^२}ताय = \frac{ला(१+स्पर)}{१+स्प^२र}(१+स्प^२र)तार = ला(१+स्पर)तार$

$$\therefore \int_{०}^{१} \frac{ला(१+य)}{१+य^२}ताय = \int_{०}^{\frac{\pi}{४}} ला(१+स्पर)तार = \int_{०}^{\frac{\pi}{४}} ला\left\{१+स्प(\tfrac{\pi}{४}-र)\right\}तार$$

४१वें प्रक्रम के (४) समीकरण से। परन्तु $स्प(\frac{\pi}{४}-र) = \frac{१-स्पर}{१+स्पर}$

इस लिये $१+स्प(\frac{\pi}{४}-र) = \frac{२}{१+स्पर}$ और $ला\left\{१+स्प(\frac{\pi}{४}-र)\right\} = ला२-ला(१+स्पर)$

इसका उत्थापन देने से

$$\int_{०}^{\frac{\pi}{४}} ला(१+स्पर)तार = \int_{०}^{\frac{\pi}{४}} \left\{ला२तार - ला(१+स्पर)तार\right\}$$

पक्षान्तरानयन से

$$२\int_{०}^{\frac{\pi}{४}} ला(१+स्पर)तार = \int_{०}^{\frac{\pi}{४}} तार\ ला२ = \frac{\pi}{४}ला२$$

$$\therefore \int_{०}^{\frac{\pi}{४}} ला(१+स्पर)तार = \frac{\pi}{८}ला२।$$

यहां देखो इस प्रकार से कैसे लाघव से उत्तर निकला है।

यहां यदि ला (१+य) का रूप $य-\frac{य^२}{२}+\frac{य^३}{३}-\frac{य^४}{४}+\cdots$ ऐसा बना कर इस में साधारण बीजगणित की रीति से $१+य^२$ का भाग दो तो

$$\frac{\text{ला}(१+य)}{१+य^{२}} = य - \frac{य^{२}}{२} - \frac{२}{३}य^{३} + \frac{य^{४}}{४} + \frac{१३}{१५}य^{५} \cdots$$ ऐसा होगा

इस में य के गुणक १ को $गु_{१}$, और $य^{२}$ के गुणक $-\frac{१}{२}$ को $गु_{२} \cdots$ $य^{न-२}$ के गुणक को $गु_{न-२}$ मानो तो $य^{न}$का गुणक $-(\frac{१}{न} + गु_{न-२})$ यह होगा यदि न सम हो। और विषम हो तो

$(\frac{१}{न} - गु_{न-२})$ यह गुणक होगा।

यदि $\frac{\text{ला}(१+य)}{१+य^{२}}$ इसमें ऊपर के श्रेढ़ी का उत्थापन देकर चलमान निकालो तो

$$\int \frac{\text{ला}(१+य)\text{ताय}}{१+य^{२}} = \frac{य^{२}}{२} - \frac{१}{२}\frac{य^{३}}{२} - \frac{२}{३}\frac{य^{४}}{४} + \frac{१}{४}\frac{य^{५}}{५} + \frac{१३}{१५}\frac{य^{६}}{६} \cdots$$ ऐसा होगा

इस लिये $$\int_{०}^{१} \frac{\text{ला}(१+य)\text{ताय}}{१+य^{२}} = \frac{१}{२} - \frac{१}{२}\cdot\frac{१}{३} - \frac{२}{३}\cdot\frac{१}{४} + \frac{१}{४}\cdot\frac{३}{५} + \frac{१३}{१५}\cdot\frac{१}{६} \cdots$$

इस लिये $\frac{\pi}{८}\text{ला}२ = \frac{१}{२} - \frac{१}{२}\cdot\frac{१}{३} - \frac{२}{३}\cdot\frac{१}{४} + \frac{१}{४}\cdot\frac{१}{५} + \frac{१३}{१५}\cdot\frac{१}{६} \cdots$

ऐसा यह अत्यन्त चमत्कार सिद्ध होता है।

(६) $\int_{०}^{\pi} ष^{न}\text{लाज्याष ताष}$ इसका मान $\int_{०}^{\pi} ष^{२}\text{लाज्याष ताष}$ इस का फल होगा यह सिद्ध करो। यदि न $>$ २।

यहां ४१ वें प्रक्रम के (४) समीकरण से

$$\int_{०}^{\pi} ष^{न}\text{लाज्याष ताष} = \int_{०}^{\pi} (\pi - ष)^{न}\text{लाज्याष ताष} = \int_{०}^{\pi} \pi^{न}(१-\frac{ष}{\pi})^{न}\text{लाज्याष ताष}$$

$$= \pi^{न}\int_{०}^{\pi} \left\{ १ - न\frac{ष}{\pi} + \frac{न(न-१)}{२}\frac{ष^{२}}{\pi^{२}} - \frac{न(न-१)(न-२)}{\lfloor ३}\frac{ष^{३}}{\pi^{३}} + \cdots + (-१)^{न}\frac{ष^{न}}{\pi^{न}} \right\} \text{लाज्याष ताष}$$

$$= \pi^{न}\int_{०}^{\pi} \left\{ १ - न\frac{ष}{\pi} + \frac{न(न-१)}{\lfloor २}\frac{ष^{२}}{\pi^{२}} - \frac{न(न-१)(न-२)}{\lfloor ३}\frac{ष^{३}}{\pi^{३}} + \cdots \right\} \text{लाज्याषताष}$$

$$+ \int_{०}^{\pi} (-१)^{न} ष^{न}\text{ लाज्याष ताष}$$

समशोधन से

$$\int_0^\pi \text{ष}^\text{न}\text{लाज्याष ताष} - \int_0^\pi (-१)^\text{न}\text{ष}^\text{न}\text{लाज्याष ताष}$$

$$= \pi^\text{न}\int_0^\pi \text{लाज्याष ताष} - \text{न}\pi^{\text{न}-१}\int_0^\pi \text{षलाज्याष ताष}$$

$$+ \frac{\text{न}(\text{न}-१)}{\lfloor २}\pi^{\text{न}-२}\int_0^\pi \text{ष}^२\text{लाज्याष ताष}\cdots$$

$$+ (-१)^{\text{न}-१}\,\pi\int_0^\pi \text{ष}^{\text{न}-१}\text{लाज्याष ताष}\cdots\cdots \quad (१)$$

(१) इस में न के स्थान में २ का उत्थापन देने से

$० = \pi^२\int_0^\pi \text{लाज्याषताष} - २\pi\int_0^\pi \text{षज्याषताष}$ ऐसा होगा

इस लिये

$$२\pi\int_0^\pi \text{षलाज्याषताष} = \frac{२}{\pi}\int_0^\pi \text{लाज्याष ताष}$$

$$\therefore \int_0^\pi \text{षलाज्याषताष} = \frac{\pi}{२}\int_0^\pi \text{लाज्याषताष}$$

परन्तु ४१वें प्रक्रम के (६)वें समीकरण से और इस प्रक्रम के (३) उदाहरण से $\frac{\pi}{२}\int_0^\pi \text{लाज्याषताष} = \frac{\pi^२}{२}\text{ला}\frac{१}{२}$

इस लिये $\int_0^\pi \text{षलाज्याषताष} = \frac{२}{\pi}\text{ ला }\frac{१}{२}$ यह सिद्ध हुआ।

यदि $\int_0^\pi \text{लाज्याषताष} = \pi\text{ ला }\frac{१}{२} = \text{च}_१$ तो

$$\int_0^\pi \text{षलाज्याषताष} = \frac{२}{\pi}\text{ ला }\frac{१}{२} = \frac{\pi}{२}\text{च}_१$$

इन का उत्थापन (१) में देने से और न के स्थान में ३ मानने से

$$२\int_0^\pi \text{ष}^३\text{लाज्याषताष} = \pi^३\text{च}_१ - \frac{३}{२}\,\frac{३}{\pi}\text{च}_१ + ३\pi\int_0^\pi \text{ष}^२\text{लाज्याषताष}$$

इस प्रकार से वार वार उत्थापन देने से

$\int_0^\pi \text{ष}^\text{न}\text{लाज्याषताष} = \text{फ}(\text{च}_२)$ ऐसा हो जायगा जहाँ

$\text{च}_२ = \int_0^\pi \text{ष}^२\text{लाज्याषताय}$ ।

अभ्यास के लिये प्रश्न।

१। सिद्ध करो कि यदि फ(य) = फ(—य) तो

$\int_{-अ}^{अ}$ फ(य)ताय = २$\int_{0}^{अ}$ फ(य)ताय। $\int_{-अ}^{0}$ फ(य)ताय = $\int_{0}^{+अ}$फ(य)ताय।

और $\int_{0}^{-अ}$फ(य) = —$\int_{0}^{+अ}$फ(य)ताय

२। यदि फ(य) = —फ(—य) तो सिद्ध करो कि

$\int_{-अ}^{+अ}$फ(य)ताय = ०। $\int_{-अ}^{0}$ फ(य)ताय = —$\int_{0}^{+अ}$फ(य) ताय।

और $\int_{0}^{-अ}$(फ)ताय = $\int_{0}^{+अ}$फ(य)।

३। यदि फ(य) = फ(-य) और फा(य) = —फा(-य) तो सिद्ध करो कि

$\int_{-अ}^{+अ}$ { फ(य) + फा(य) } ताय = $\int_{-अ}^{+अ}$फ(य)ताय = $\int_{-अ}^{+अ}$ { फ(य)-फा(य) } ताय।

४। सिद्ध करो कि

$\int_{-\infty}^{+\infty}$ इ$^{-य^2}$ताय = $\sqrt{\pi}$ और $\int_{-अ}^{+अ}$ ज्याय^{9} = ०

५। सिद्ध करो कि

$$\int_{-अ}^{+अ}\frac{कोज्यायताय}{१+य^2} = \int_{-अ}^{+अ}\frac{कोज्या२यताय}{(१+य^2)(कोज्याय-ज्याय)}$$

६। सिद्ध करो कि

$$\int_{अ}^{क}फ(य)ताय = \frac{क-अ}{२ग}\int_{-ग}^{+ग}फ\left(\frac{क+अ}{२}+\frac{क-अ}{२ग}य\right)ताय$$

७। सिद्ध करो कि

$$\int_{अ}^{क}फ(य)ताय = \frac{क-अ}{ग-घ}\int_{घ}^{ग}फ\left(\frac{अग-कघ}{ग-घ}+\frac{क-अ}{ग-घ}य\right) ताय$$

८। सिद्ध करो कि

$$\int ला(१+नकोज्याय)ताय = यला\frac{न}{२ना} + २नाज्याय - \frac{२}{२.२}ना^2ज्या२य$$

$$+\frac{२}{३\cdot३}ना^3ज्या३य - \frac{२}{४\cdot४}ना^4ज्या४य + \cdots\cdots$$

जहां $ना = \frac{१-\sqrt{१-न^2}}{न}$

९। सिद्ध करो कि

$$\int_{0}^{\pi} ला(१+नकोज्याय)ताय = \pi ला\frac{न^2}{२(१-\sqrt{१-न^2})}$$

१० । सिद्ध करो कि

$\int$ ला(१ + २मकोज्याय + म^२)ताय

$= २(\text{मज्याय} - \frac{म^२}{२^२}\ ज्या२य + \frac{म^३}{२^३}ज्या३य - \frac{म^४}{२^४}ज्या४य + \cdots)$

वा, $\int$ ला (१ + २मकोज्याय + म^२)ताय

$$= २यलाम + २\left\{\frac{ज्याय}{म} - \frac{ज्या२य}{२^२म^२} + \frac{ज्या३य}{३^२म^३} - \frac{ज्या४य}{४^२म^४} + \ldots\right\}$$

११ । सिद्ध करो कि

$\int$ ला(१ + नकोज्याय)ताय = २य लाकोज्या $\frac{ष}{२}$

$+ २(\text{स्प}\ \frac{ष}{२}\ ज्याय - \frac{१}{२^२}\text{स्प}^२\ \frac{ष}{२}\ ज्या२य + \ \ldots)$

यदि न = ज्याष

१२ । सिद्ध करो कि

$$\int_०^{\frac{\pi}{२}} ला(१ + न_०ज्या^२य)ताय = \frac{\pi}{४}ला\left\{(१+न_०)(१+न_१)^{\frac{१}{२}}(१+न_२)^{\frac{१}{४}}(१+न_३)^{\frac{१}{८}}\cdots\right\}$$

जहां $\quad न_{द+१} = \frac{न_द^२}{४(न_द + १)}$

यहां ४१वें प्रक्रम के (४) समीकरण से $\int_०^{\frac{\pi}{२}}$ला(१ + न$_०$ज्या^{२}य)ताय

$= \int_०^{\frac{\pi}{२}}$ला(१ + नकोज्या^{२}य)ताय फिर इन दोनों को जोड़ कर एक नियम परम्परा बनावो ।

१३ । १२वें और ९वें प्रश्न से सिद्ध करो कि

$$\left\{\frac{१+(१+न_०)^{\frac{१}{२}}}{२}\right\}^४ = (१+न_०)(१+न_१)^{\frac{१}{२}}(१+न_२)^{\frac{१}{४}}(१+न_३)^{\frac{१}{८}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

१४ । सिद्ध करो कि

$$\left\{फ(अ)फ(अ + \frac{ग}{न})फ(अ + \frac{२ग}{न}) \cdots फ(अ + \frac{न-१}{न}ग)\right\}^{\frac{१}{न}} < \frac{१}{ग}\int_अ^{अ+ग} फ(य)ताय$$

यदि न का मान अनन्त हो तो ।

१५ । प्रथमाध्याय के ३३वें प्रश्न से पहले यह सिद्ध करो कि

$$\int इ^{कय}कोज्याअयताय = \frac{इ^{कय}कोज्या(अय-ष)}{(अ^२+क^२)^{\frac{१}{२}}} + \text{स्थि}, \text{ जहां स्पष} = \frac{अ}{क}$$

फिर इस पर से यह सिद्ध करो कि इ^{कय}कोज्याअय ताय इस के चल का चल फिर उस के चल का चल यों न वार तक जो चल होगा उस का प्रमाण

$$\frac{इ^{कय}कोज्या(अय-नप)}{(अ^2+क^2)^{\frac{न}{२}}}+गा+गा_१य+गा_२य^2+गा_३य^3+\cdots+गा_{न-१}य^{न-१}$$ यह होगा।

जहां गा, $गा_१$, $गा_२$ इत्यादि स्थिराङ्क हैं।

१६। ८वें से सिद्ध करो कि

$$लाज्याय = ला\tfrac{१}{२}—कोज्या२य—\tfrac{१}{२}कोज्या४य—\tfrac{१}{३}कोज्या६य—\tfrac{१}{४}कोज्या८य\ldots,$$ और

$$लाकोज्याय = ला\ \tfrac{१}{२}+कोज्या२य—\tfrac{१}{२}कोज्या४य+\tfrac{१}{३}कोज्या६य—\tfrac{१}{४}कोज्या८य+\cdots$$

१७। सिद्ध करो कि यदि किसी श्रेढ़ी का न संख्यक पद

$\frac{त(त+अ)(त+२अ)\ \ldots\ .(त+नअ)}{द(द+अ)(द+२अ)\ \ldots\ .(द+नअ)}$ यह हो तो यह श्रेढ़ी सान्त होगी यदि $द>त+अ$ और यदि $द<त+अ$ तो श्रेढ़ी का मान अनन्त होगा।

१८। सिद्ध करो कि किसी श्रेढ़ी के न+१ संख्यक पद में न संख्यक पद का भाग देने से यदि लब्धि

$\frac{य^त+आय^{त-१}+काय^{त-२}+\cdots}{य^त+अय^{त-१}+कय^{त-२}+\cdots}$ यह हो तो यदि $अ > का+१$ तो श्रेढ़ी का मान सान्त और यदि $अ<का+१$ तो अनन्त होगा।

१९। यदि $आ=\int_अ^क च^2 ताय$, $का=\int_अ^क चजताय$ और $गा=\int_अ^क ज^2ताय$ तो सिद्ध करो कि $आ\times गा > का^2$।

बीजगणित का $(अ_१^2+अ_२^2+\cdots+अ_न^2)(क_१^2+क_२^2+\cdots+क_न^2) > (अ_१क_१+अ_२क_२+\cdots.अ_नक_न)^2$ यह सिद्धान्त देखो।

२०। सिद्ध करो कि

$$\int_0^{\frac{\pi}{२}} ला\ कोस्पय\ ताय = ०$$

२१। सिद्ध करो कि $\int_0^\infty \frac{२\ अकताय}{य^४+य^2(अ^2+क^2)+अ^2क^2} = \frac{\pi}{अ+क}$

२२। सिद्ध करो कि $\int_0^अ \frac{(१—क^2य^2)\ ताय}{\sqrt{(अ^2—य^2)}} = \frac{\pi}{२}\left[१—\frac{अ^2क^2}{२}\right]$

२३ । सिद्ध करो कि यदि न का मान अनन्त हो तो

$$\frac{१}{न^{६}}\left\{ १^{५}+२^{५}+३^{५}+\cdots\cdots+(न-१)^{५} \right\}=\frac{१}{६}$$

२४ । सिद्ध करो कि यदि न का मान अनन्त हो तो

$$\frac{१+(१+\frac{१}{न})^{२}+(१+\frac{२}{न})^{२}+\cdots+(१+\frac{न-१}{न})^{२}}{१+(१+\frac{१}{न})^{३}+(१+\frac{२}{न})^{३}+\cdots+(१+\frac{न-१}{न})^{३}}=\frac{२८}{४५}$$

२५ । सिद्ध करो कि $\int_{०}^{\frac{\pi}{२}} \text{कोज्यायलाकोज्यायताय} = \text{ला}\,(२)-१$

२६ । सिद्ध करो कि

$$\int \text{लाज्यायताय} = \text{यला}\tfrac{१}{२}-\left(\tfrac{१}{२}\text{ज्या } २\,य+\tfrac{१}{२\cdot४}\text{ज्या } ४\,य+\tfrac{१}{३\cdot६}\text{ज्या } ६\,य+\cdots\right)$$

२७ । सिद्ध करो कि

$$\int \text{लाकोज्यायताय}=\text{यला}\tfrac{१}{२}+\tfrac{१}{२}\text{ज्या}२य-\tfrac{१}{२\cdot४}\text{ज्या}४य+\tfrac{१}{३\cdot६}\text{ज्या}६य-\tfrac{१}{४\cdot८}\text{ज्या}८य+\cdots$$

२८ । सिद्ध करो कि $\int \text{लास्पयताय} = -\text{ज्या}२य-\tfrac{१}{६}\text{ज्या}६य-\cdots\cdots$

२९ । सिद्ध करो कि $\frac{१}{{}_{२}अ(\text{ला}२)^{क}}+\frac{१}{{}_{३}अ(\text{ला}३)^{क}}+\frac{१}{{}_{४}अ(\text{ला}४)^{क}}+\ldots+\text{अनन्त}$

इस श्रेढ़ी का मान सान्त होगा यदि अ 7 १ और क का मान चाहे जो हो।

३० । $(अ-१)+(अ^{\frac{१}{२}}-१)+(अ^{\frac{१}{३}}-१)+(अ^{\frac{१}{४}}-१)+\ldots+(अ^{\frac{१}{न}}-१)$

यह सान्त होगा यदि $न=\infty$ उ० नहीं ।

३१ । सिद्ध करो कि

$$य+\frac{य^{२}}{|\underline{२}}+\frac{य^{३}}{|\underline{३}}+\frac{य^{४}}{|\underline{४}}+\ldots \text{यह सर्वदा सान्त होगा ।}$$

३२ । सिद्ध करो कि $\int इ^{-य}\,\{ फ(य)+फ'(य) \}\,\text{ताय} = इ^{य}फ(य)$

३३ । सिद्ध करो कि $\int_{०}^{१}\frac{यइ^{य}\text{ताय}}{(१+य)^{२}}=\frac{इ-२}{२}$

३४ । सिद्ध करो कि यदि

$फ(य)=अ_{०}+अ_{१}य+अ_{२}य^{२}+अ_{३}य^{३}+\ldots+$ अनन्त यह सान्त हो तो $\int फ(य)\text{ताय}$ इस का मान भी यदि श्रेढ़ी में ले आवें तो उस श्रेढ़ी का मान भी सान्त होगा ।

३५ । यदि $इ^{कय}$ताय का न वार चल निकालें तो सिद्ध करो कि उसका

$$\text{मान} = \frac{इ^{कय}}{क^{न}}+आ_{१}य^{न-१}+आ_{२}य^{न-२}+\ldots+आ_{न-१}य+आ_{न}$$

जहां $आ_1$, $आ_2$ इत्यादि स्थिराङ्क हैं ।

३६ । एक आदमी अपने (अ) स्थान से पूर्व को चला । दूसरा जिस का (क) स्थान अ से ठीक उत्तर की ओर एक मील पर था वहाँ से उसके मिलने के लिये चला । पहले की प्रतिक्षण की गति को उस के और अ स्थान के सैक अन्तर के लघुरिक्थ से गुण देने और उस के और क स्थान के अन्तरवर्ग का भाग देने से जो लब्ध हो उतना प्रतिक्षण में दूसरा चलता था तो बताओ कि जब पहला अपने स्थान से एक मील गया उस समय दूसरा अपने स्थान से कितना गया होगा ।

उ० $\frac{\pi}{८}$ ला (२) = $\frac{२६}{१००}$ मील

३७ । अ स्थान से साथ ही घोड़ दौड़ में क, ख, और ग घोड़े दौड़े । किसी क्षण में अ स्थान से जितनी मील दूरी पर क होता था उस से और उस के वर्ग से उस के उस क्षण की गति को गुण दो तो वह क्रम से ख और ग की उस क्षण की गति होती है तो बतावो कि क और ख, फिर अ स्थान से क और ख, क और ग, और ख और ग कितनी कितनी दूरी पर मिलेंगे ।

उ० ख, ग $\frac{३}{२}$ । क, ग, $\sqrt{३}$ = १$\frac{३}{४}$ और क, ख, २ मील दूरी पर मिलेंगे ।

इति चतुर्थाध्याय ।

